Université Internationale de Casablanca
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES
Université Privée Autorisée par l'Etat UP2/11

École d'ingénierie

Examen Final d'Algèbre linéaire

Semestre 4

Durée (2 h)

Prof.   A.Ramadane, Ph.D.

Exercice 1 : (5points)

Soit B=($\overrightarrow{b_1}$, $\overrightarrow{b_2}$, $\overrightarrow{b_3}$) une base de V^3 telle que

Soit $\overrightarrow{b_1} = 2\,\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$, $\overrightarrow{b_2} = -2\,\vec{\imath} - 8\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ et $\overrightarrow{b_3} = 3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 6\vec{k}$ des vecteurs de V^3

a) Trouver la base orthonormale B'', obtenue à partir de B par le procédé de Gram-Schmidt
b) Donner la matrice de transition de B à B'', ${}_{B''}\mathbf{P}_B$
c) Donner la matrice de transition de C à B'', ${}_{B''}\mathbf{P}_{C}$. Avec C=$(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath},\vec{k})$
d) Soit $\vec{U} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} - 4\vec{k}$, Donner $[\ \vec{U}\ ]_{B''}$.
e) Soit W = [$\overrightarrow{b_1}$, $\overrightarrow{b_2}$]. Exprimer $\vec{U}$ sous la forme $\vec{U} = \overrightarrow{W_1} + \overrightarrow{W_2}$ où $\overrightarrow{W_1} \in$ W et $\overrightarrow{W_2} \in W^{\perp}$

Exercice 2 : (4points)

Soit V^3 et sa base usuelle C =$(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath},\vec{k})$, soit une application linéaire

T : $V^3 \longrightarrow V^3$ telle que

$T(x\,\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k})$ = (x+y+3z) $\vec{\imath}$ + (x + 2 y +z) $\vec{\jmath}$ + (x+y+3z) $\vec{k}$

a) Donner $[\ T\ ]_C$ la matrice représentative de T dans la base de C
b) Quelle est la dimension de Ker(T)
c) Donner une base de Im(T) et le rang de T.
d) Montrer que le vecteur $-4\vec{\imath} + 8\,\vec{\jmath} - 4\,\vec{k}$ appartient à l'image de T.
e) Résoudre le système $\begin{cases} x + y + 3z = -4 \\ x + 2y + z = 8 \\ x + y + 3z = -4 \end{cases}$

Exercice 3 : (4 points)

Soit la forme quadratique

$$f(x,y,z) = 3x^2 + 2xy + 3y^2 - 2xz + 2yz + 3z^2$$

a) Trouver la matrice symétrique A qui lui est associée.
b) Calculer les valeurs propres de A.
c) Trouver les vecteurs propres de A.
d) Trouver le changement orthogonal de coordonnées qui diagonalise la forme quadratique.
e) Ecrire la forme quadratique sans les termes mixtes.

Exercice 4:(4 points)

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

a) Donner le polynôme caractéristique de A ainsi que ses valeurs propres.
b) Donner une base de chaque sous-espace propre de A.
c) Est-ce que A est diagonalisable ? Justifier
d) A est elle inversible ? Déduire Ker(A)

Exercice 5 (3 points)

a) Soit $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots\ldots, \vec{a}_n)$ et $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots\ldots, \vec{b}_n)$ deux bases orthonormées d'un espace vectoriel V.

   Montrer que ${}_A\mathbf{P}_B = ({}_B\mathbf{P}_A)^t = ({}_B\mathbf{P}_A)^{-1}$

b) Définir la projection orthogonale de $\vec{U}$ sur $\vec{a}$, montrer que c'est une application linéaire, donner sa matrice et la diagonaliser.