Université Internationale de Casablanca
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES
Université Privée Autorisée par l'Etat UP2/11

École d'ingénierie

Contrôle d'algèbre linéaire

N° = 1, Semestre 2 (Rattrapage)

Durée (2 h)

Prof. A.Ramadane, Ph.D.

Exercice 1 : (4 points)

Soit $\overrightarrow{U_1}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}-\vec{k}$, $\overrightarrow{U_2}=\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+3\vec{k}$ et $\overrightarrow{U_3}=\overrightarrow{5\imath}-4\vec{\jmath}+\vec{k}$ des vecteurs de V^3

a) Montrer que S ={ $\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3}$} est un ensemble orthogonal.
b) Justifier le fait que S est une base de V^3.
c) Soit W=[$\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}$] et soit $\vec{U}=\vec{\imath}-\vec{\jmath}-3\vec{k}$. Ecrire $\vec{U}$ sous la forme $\vec{U}$ = $\overrightarrow{W_1}+\overrightarrow{W_2}$ où $\overrightarrow{W_1}\in$ W et $\overrightarrow{W_2}\in W^{\perp}$
d) Donner une description algébrique de W.

Exercice 2 : (4 points)

Soit B=($\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$) une base de V^3 telle que

Soit $\overrightarrow{b_1}=2\,\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+\vec{k}$, $\overrightarrow{b_2}=-\vec{\imath}-4\vec{\jmath}+\vec{k}$ et $\overrightarrow{b_3}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}+2\vec{k}$ des vecteurs de V^3

a) Trouver la base orthonormale B'', obtenue à partir de B par le procédé de Gram-Schmidt
b) Donner la matrice de transition de B à B'', $_{B''}\mathbf{P}_{B}$
c) Donner la matrice de transition de C à B'', $_{B''}\mathbf{P}_{C}$. Avec C=($\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$)
d) Soit $\vec{U}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}-4\vec{k}$, Donner [$\vec{U}$]$_{B''}$.
e) Soit W = [$\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}$]. Exprimer $\vec{U}$ sous la forme $\vec{U}$ = $\overrightarrow{W_1}+\overrightarrow{W_2}$ où $\overrightarrow{W_1}\in$ W et $\overrightarrow{W_2}\in W^{\perp}$

Exercice 3 : (5points)

Soit V^3 et sa base usuelle C =$(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath},\vec{k})$, soit une application linéaire

T : $V^3 \longrightarrow V^3$ telle que

T$(x\,\vec{\imath}\; + y\vec{\jmath} + z\vec{k})$ = (x+az) $\vec{\imath}$ + (x +z) $\vec{\jmath}$ + (ax+z) $\vec{k}$, où a est un réel fixé

a) Donner $[\,T\,]_C$ la matrice représentative de T dans la base de C
b) Donner une base de Im(T) .
c) Y'a-t il un noyau autre que $\{\vec{0}\}$? Si oui donner une base.
d) Quelles sont les valeurs propres de T ?
e) Pour chaque valeur propre λ donner une base E_{λ}.
f) Peut-on diagonaliser T ? Justifier
g) Donner une base de Im(T) et le rang de T.

Exercice 4:(4 points)

Soit la matrice A = $\begin{bmatrix} 3 & -1 & a \\ -1 & 2 & -1 \\ a & -1 & 3 \end{bmatrix}$, a est un réel

a) Discuter, selon les valeurs a, du rang de A.
b) Lorsque a =-2, le vecteur $[1\ \ 0\ \ -1]^t$ est un vecteur propre de A.
Diagonaliser la matrice A, donne la matrice orthogonale P qui diagonalise A et expliquer le lien entre A et la matrice D.

Exercice 5 (3 points)

a) Soit A = ($\vec{a}_{1,}\, \vec{a}_{2,\dots\dots,}\, \vec{a}_{n}$) et B= ($\vec{b}_{1,}\, \vec{b}_{2,\dots\dots,}\, \vec{b}_{n}$) deux bases orthonormées d'un espace vectoriel V.

Montrer que ${}_{A}\mathbf{P}_{B} = ({}_{B}\mathbf{P}_{A})^{t} = ({}_{B}\mathbf{P}_{A})^{-1}$

b) Définir la projection orthogonale de $\vec{U}$ sur $\vec{a}$, montrer que c'est une application linéaire, donner sa matrice et la diagonaliser.