École d'ingénierie

Contrôle en Algèbre linéaire

Durée (1 h : 30 mn)

CPI2

Prof. : A.Ramadane

28-04-2014

Université Internationale de Casablanca

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

Exercice 1 (6.5 points)

Soit V^3 et sa base usuelle C =$(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, soit une application linéaire

T : $V^3 \longrightarrow V^3$ telle que

$T(x\,\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k})$ = (x+y+3z) $\vec{\imath}$ + (x + 2 y +z) $\vec{\jmath}$ + (x+y+3z) $\vec{k}$

a) Donner $[\,T\,]_C$ la matrice représentative de T dans la base de C
b) Quelle est la dimension de Ker(T)
c) Donner une base de Im(T) et le rang de T.
d) Montrer que le vecteur $-\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath} - \vec{k}$ appartient à l'image de T.
e) Résoudre le système $\begin{cases} x+y+3z=-1 \\ x+2y+z=2 \\ x+y+3z=-1 \end{cases}$

Exercice 2 (6.5 points)

Soit B=($\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$) une base de V^3 telle que

Soit $\overrightarrow{b_1} = 2\,\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$, $\overrightarrow{b_2} = -2\,\vec{\imath} - 8\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ et $\overrightarrow{b_3} = 3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 6\vec{k}$ des vecteurs de V^3

a) Trouver la base orthonormale B'', obtenue à partir de B par le procédé de Gram-Schmidt
b) Donner la matrice de transition de B à B'', ${}_{B''}\mathbf{P}_B$
c) Donner la matrice de transition de C à B'', ${}_{B''}\mathbf{P}_C$. Avec C=$(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$
d) Soit $\vec{U} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} - 4\vec{k}$, Donner $[\,\vec{U}\,]_{B''}$.
e) Soit W = $[\,\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\,]$. Exprimer $\vec{U}$ sous la forme $\vec{U} = \overrightarrow{W_1} + \overrightarrow{W_2}$ où $\overrightarrow{W_1} \in$ W et $\overrightarrow{W_2} \in W^{\perp}$.

Université Internationale de Casablanca
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

Exercice 3 (3.5 points)

Soit U = { $\vec{U} \in V^3$ / $\vec{U} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ où x-9y+3z=0 }

a) Donner une base de U et sa dimension

b) Soit $U^{\perp}$ le complément orthogonal de U. Donner une base de $U^{\perp}$.

c) Soit $\vec{U} = 9\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k}$. Calculer $\text{proj}_U \vec{U}$

Exercice 4 (3.5 points)

a) Soit $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots\ldots, \vec{a}_n)$ et $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots\ldots, \vec{b}_n)$ deux bases orthonormées d'un espace vectoriel V.

Montrer que $_A\mathbf{P}_B = (_B\mathbf{P}_A)^t = (_B\mathbf{P}_A)^{-1}$

a) Définir la projection orthogonale de $\vec{U}$ sur $\vec{a}$, montrer que c'est une application linéaire, donner sa matrice.