

École d'ingénierie

Contrôle en Algèbre linéaire

Durée (1 h : 30 mn)

CPI2

Prof. : A.Ramadane

28-04-2014



**Université Internationale
de Casablanca**

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

Exercice 1 (6.5 points)

Soit V^3 et sa base usuelle $C = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit une application linéaire

$T : V^3 \longrightarrow V^3$ telle que

$$T(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = (x+y+3z)\vec{i} + (x+2y+z)\vec{j} + (x+y+3z)\vec{k}$$

- a) Donner $[T]_C$ la matrice représentative de T dans la base de C
- b) Quelle est la dimension de $\text{Ker}(T)$
- c) Donner une base de $\text{Im}(T)$ et le rang de T .
- d) Montrer que le vecteur $-\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ appartient à l'image de T .
- e) Résoudre le système
$$\begin{cases} x + y + 3z = -1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + y + 3z = -1 \end{cases}$$

Exercice 2 (6.5 points)

Soit $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ une base de V^3 telle que

Soit $\vec{b}_1 = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b}_2 = -2\vec{i} - 8\vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{b}_3 = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$ des vecteurs de V^3

- a) Trouver la base orthonormale B'' , obtenue à partir de B par le procédé de Gram-Schmidt
- b) Donner la matrice de transition de B à B'' , ${}_{B''}\mathbf{P}_B$
- c) Donner la matrice de transition de C à B'' , ${}_{B''}\mathbf{P}_C$. Avec $C = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
- d) Soit $\vec{U} = \vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$, Donner $[\vec{U}]_{B''}$.
- e) Soit $W = [\vec{b}_1, \vec{b}_2]$. Exprimer \vec{U} sous la forme $\vec{U} = \vec{W}_1 + \vec{W}_2$ où $\vec{W}_1 \in W$ et $\vec{W}_2 \in W^\perp$.



Exercice 3 (3.5 points)

Soit $U = \{ \vec{U} \in V^3 / \vec{U} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ où } x-9y+3z=0 \}$

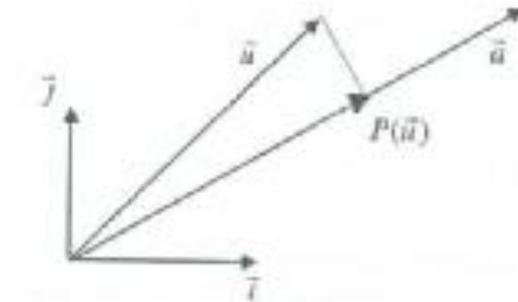
- Donner une base de U et sa dimension
- Soit U^\perp le complément orthogonal de U . Donner une base de U^\perp .
- Soit $\vec{U} = 9\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k}$. Calculer $\text{proj}_U \vec{U}$

Exercice 4 (3.5 points)

- Soit $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ et $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$ deux bases orthonormées d'un espace vectoriel V .

Montrer que ${}_A P_B = ({}_B P_A)^t = ({}_B P_A)^{-1}$

- Définir la projection orthogonale de \vec{U} sur \vec{a} , montrer que c'est une application linéaire, donner sa matrice.



**Université Internationale
de Casablanca**

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES