École d'ingénierie

Contrôle en Algèbre linéaire

Durée (2h : 00 mn)

CPI2

Prof. : A.Ramadane

23-05-2016

Université Internationale de Casablanca

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

Exercice 1 : (5 points)

Soit V^3 et sa base usuelle C =($\vec{i}$,$\vec{j}$,$\vec{k}$) , soit une application linéaire

T : $V^3 \longrightarrow V^3$ telle que

T($x\,\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$) = (x+y+3z) $\vec{i}$ + (x + 2 y +z) $\vec{j}$ + (x+y+3z) $\vec{k}$

a) Donner $[\,T\,]_C$ la matrice représentative de T dans la base de C
b) Quelle est la dimension de Ker(T)
c) Donner une base de Im(T) et le rang de T.
d) Montrer que le vecteur - $\vec{i}$ + 2 $\vec{j}$ - $\vec{k}$ appartient à l'image de T.

Résoudre le système $\begin{cases} x + y + 3z = -1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + y + 3z = -1 \end{cases}$

Exercice 2:(5 points)

Soit la matrice A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

a) Donner le polynôme caractéristique de A ainsi que ses valeurs propres.
b) Donner une base de chaque sous-espace propre de A.
c) Est-ce que A est diagonalisable ? Justifier
d) A est elle inversible ? Déduire Ker(A)

Exercice 3: (6 points)

Soit la matrice A = $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

a) Donner le polynôme caractéristique de A.
b) Vérifier que $[\,1\ \ 1\ \ 1]^t$ est un vecteur propre de A.
c) Donner les valeurs propres de A ainsi que leur multiplicité algébrique.
d) Pour chaque valeur propre de A, donner une base du sous-espace propre qui lui est associé.
e) Est-ce que A est diagonalisable ? si non, justifier. Si oui, donner une matrice P qui diagonalise A ainsi que la matrice diagonale D associée.
f) Soit T : $V^3 \longrightarrow V^3$ une application linéaire telle que

   $[T]_C = A$ où $C = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

   Donner une interprétation géométrique de T.

Exercice 4: (4 points)

a) A^{1000} et e^A ; avec $e^A = \sum \frac{A^i}{i!}$;

A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

b) Donner des objectifs de la diagonalisation