Espace vectorielles

(Bases orthonormales)

A. Ramadane, Ph.D.

Produit scalaire et base orthonormale

rappel

$\vec{a} \bullet \vec{b} = \|a\| \, \|b\| \cos\theta \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$

Définition 1.7 *Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire*

- *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont* **orthogonaux** *si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.*
- $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$.
- *Un vecteur $\vec{u}$ est* **unitaire** *si $\vec{u} \cdot \vec{u} = 1$.*
- *L'ensemble $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\}$ de vecteurs est un ensemble* **orthogonal** *si $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$ pour tout $i \neq j$. Si cet ensemble est une base, cette base est dite* **orthogonale**.
- *Un ensemble orthogonal tel que chaque vecteur est unitaire est dit* **orthonormal**. *Si cet ensemble est une base, c'est une* **base orthonormale.**

base orthonormale : simplification des calculs !

e

Produit scalaire et base orthonormale

THÉORÈME 8 Soit $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ un ensemble orthogonal dans un espace vectoriel avec un produit scalaire

Alors S est un système libre

DÉMONSTRATION

à montrer: $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$ (1)

a pour seule solution $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$

on effectue le produit scalaire de chaque membre de l'équation (1) par $\vec{v}_\ell$

$$(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n) \bullet \vec{v}_\ell = \vec{0} \bullet \vec{v}_\ell = 0 \quad (2)$$

$$a_\ell(\vec{v}_\ell \bullet \vec{v}_\ell) = 0$$

$$a_\ell = 0 \qquad \ell = 1, 2, \ldots, n$$

Produit scalaire et base orthonormale

décomposition d'un vecteur dans une base orthonormale:

simplification des calculs !

THÉORÈME 9 : Soit V un espace vectoriel de dimension n muni d'un produit scalaire.

Soit $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, .. \vec{v}_n\}$ une base orthonormale de V

Alors tout vecteur v de V peut s'écrire :

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1 + (\vec{v} \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_2 + \ldots + (\vec{v} \cdot \vec{v}_n)\vec{v}_n$$

DÉMONSTRATION

$$\vec{v} = c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + \ldots + c_n\vec{v_n}$$

$$\vec{v} \bullet \vec{v_1} = c_1\,(\vec{v_1} \bullet \vec{v_1}) = c_1$$

idem pour $c_2, \ldots, c_n$ donne $c_\ell = (\vec{v} \bullet \vec{v_\ell})\quad \ell = 1, 2, \ldots, n$

Exemple

$S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ $\vec{v}_1 = j$ $\vec{v}_2 = (-4/5)\, i + (3/5)\, k$ $\vec{v}_3 = (3/5)\, i + (4/5)\, k$

exprimer le vecteur $\vec{v} = i + j + k$ comme une combinaison linéaire de S

Solution

S est une base orthonormale : vérification directe

on calcule le produit scalaire de $\vec{v}$ avec chacun des $\vec{v}_\ell$

$\vec{v} \bullet \vec{v}_1 = 1$ $\vec{v} \bullet \vec{v}_2 = -(1/5)$ $\vec{v} \bullet \vec{v}_3 = (7/5)$

donc $\vec{v} = \vec{v}_1 - (1/5)\, \vec{v}_2 + (7/5)\, \vec{v}_3$

bases orthonormales : les meilleures !

Produit scalaire et base orthonormale

THÉORÈME 10 Si $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ est une **base orthonormale** de l'espace vectoriel V et si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs de V

$$\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + \ldots + u_n\vec{e}_n$$

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + \ldots + v_n\vec{e}_n$$

Alors

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n$$

$$\|\vec{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2$$

Peut-on remplacer une base quelconque par une base orthonormale?

réponse : ....   procédé GRAM-SCHMIDT

Définition 1.8 *Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et soit W un sous-espace vectoriel de V. Le sous-ensemble*

$$\left\{\vec{u} \in V \;\middle|\; \vec{u} \cdot \vec{w} = 0, \quad \forall \vec{w} \in W \right\}$$

est dit **l'orthogonal de** W *et est noté* $W^{\perp}$.

EXEMPLE Soit V^3 $W = [\, i - j + 2k \,]$ un sous-espace de V^3

Déterminer l'espace orthogonal à W : $W^{\perp}$

Solution: $W^{\perp} = \{ \ \vec{u} \ \varepsilon \ V^3 \mid \vec{u} \bullet \vec{w} = 0$ pour tout $w \ \varepsilon \ W \}$

$\vec{w} = c\,(i - j + 2k)$ $c \ \varepsilon \ \bullet$ (• •= nombres réels)

$\vec{u} = x\,i + y\,j + z\,k$

$\vec{u} \bullet \vec{w} = c\,(x - y + 2z) = 0$ pour tout c donc $x - y + 2z = 0$

$W^{\perp} = \{ u \ \varepsilon \ V^3 \mid \vec{u} = xi + yj + zk$ avec $x - y + 2z = 0 \}$

EXEMPLE suite

on connait la base de W : vecteur $\vec{w} = i - j + 2k$

déterminer une base de $W^{\perp}$

$\vec{u} = ai + bj + ck$ a? b? c?

il faut $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$

$a - b + 2c = 0$

une équation 3 inconnues : beaucoup de solutions

par exemple

solution 1 : $c = 0$ donne $a = b$

$\vec{u} = i + j$ avec $a = b = 1$ et $c = 0$

solution 2 : $b = 0$ donne $a = -2c$

$\vec{u} = 2i - k$ avec $c = -1$ $a = -2$ $b = 0$

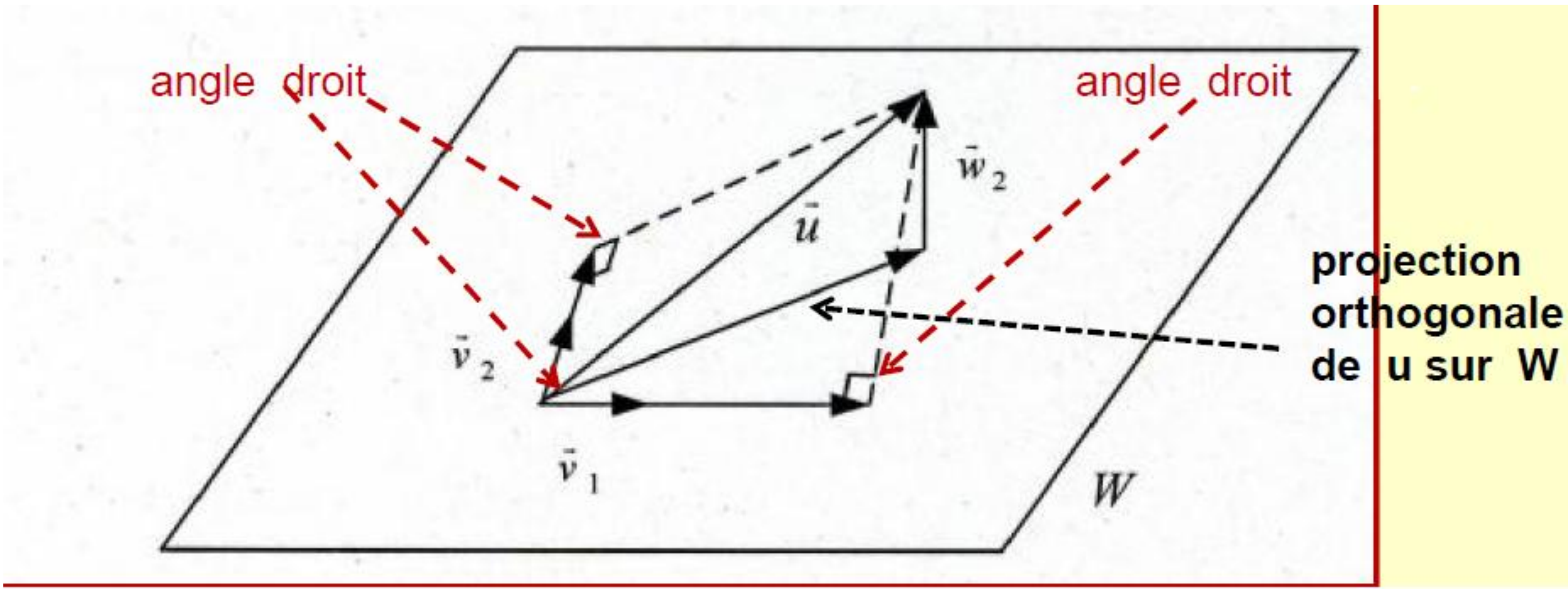
La base de $W^{\perp}$ complète orthogonalement la base de V mais la base totale n'est pas forcément orthogonale

Théorème 11 *Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et soit W un sous-espace vectoriel de V ayant une base orthogonale* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\}$.

La projection orthogonale de $\vec{u}$ sur W notée $\mathrm{proj}_W\, \vec{u}$ *est la somme des projections de $\vec{u}$ sur les vecteurs de la base de W,*

$$\mathrm{proj}_W\, \vec{u} = \frac{(\vec{u}\cdot\vec{v}_1)}{(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1)}\,\vec{v}_1 + \frac{(\vec{u}\cdot\vec{v}_2)}{(\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2)}\,\vec{v}_2 + \ldots + \frac{(\vec{u}\cdot\vec{v}_r)}{(\vec{v}_r\cdot\vec{v}_r)}\,\vec{v}_r \qquad (1)$$

et ce vecteur est unique quelle que soit la base orthogonale choisie.


angle droit
angle droit
$\vec{w}_2$
$\vec{u}$
$\vec{v}_2$
$\vec{v}_1$
W
projection
orthogonale
de u sur W

DÉMONSTRATION

a) $\vec{w}_1 = \text{proj}_W \vec{u}$ est un vecteur de W

car c'est une combinaison linéaire des $\vec{v}_\ell$ $\ell = 1, 2, .. r$

b) $\vec{w}_2 = \vec{u} - \text{proj}_W \vec{u}$ est un vecteur de $W^\perp$

on a $\vec{w}_2 \perp \vec{v}_\ell$ puisque que $\vec{w}_2 \cdot \vec{v}_\ell = 0$ tout ℓ

$\vec{w}$ vecteur quelconque de W $\vec{w} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_r\vec{v}_r$

$\vec{w}_2 \cdot \vec{w} = c_1 (\vec{w}_2 \cdot \vec{v}_1) + c_2 (\vec{w}_2 \cdot \vec{v}_2) + \dots + c_r (\vec{w}_2 \cdot \vec{v}_r) = \vec{0}$

c) unicité de $\text{proj}_W \vec{u}$: ne dépend pas de la base orthonormale choisie

soient $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r\}$ et $B' = \{\vec{v}'_1, .\vec{v}'_2, \dots, \vec{v}'_r\}$ 2 bases ortho de W

$\vec{w}_2 = \vec{u} - \vec{w}_1 \; \varepsilon \; W^\perp$ et $\vec{w}'_2 = \vec{u} - \vec{w}'_1 \; \varepsilon \; W^\perp$ $\vec{w}_2 - \vec{w}'_2$ est dans $W^\perp$

mais $\vec{w}_2 - \vec{w}'_2 = (\vec{u} - \vec{w}_1) - (\vec{u} - \vec{w}'_1) = \vec{w}'_1 - \vec{w}_1$ est dans W et $W^\perp$

donc $\vec{w}_1 - \vec{w}'_1 = \vec{0}$ donc $\vec{w}_1 = \vec{w}'_1$

DÉFINITION

Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et $\vec{u}$ ε V

Soit W un sous-espace de V

vecteur $\vec{w}_2 = \vec{u} - \mathrm{proj}_W \vec{u}$ est orthogonal à tout vecteur de W

$\vec{w}_2$ s'appelle la *composante de $\vec{u}$ orthogonale à W*

EXEMPLE

Soit W sous-espace de V^3 engendré par $\vec{v}_1 = j$ et $\vec{v}_2 = 3i - 4k$

projection de $\vec{u} = i + j + k$ sur W

calculer le vecteur projection de $\vec{u}$ sur W

ainsi que la composante de $\vec{u}$ dans $W^{\perp}$

EXEMPLE

Soit W sous-espace de V^3 engendré par $\vec{v}_1 = j$ et $\vec{v}_2 = 3i - 4k$

projection de $\vec{u} = i + j + k$ sur W

$$\text{proj}_W \vec{u} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2$$

$$c_1 = (\vec{u} \cdot \vec{v}_1) / (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1) = 1 / 1 = 1$$

$$c_2 = (\vec{u} \cdot \vec{v}_2) / (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2) = -1 / 25 = -(1 / 25)$$

$$\overrightarrow{\text{proj}_W u} = \vec{v}_1 - (1/25)\, \vec{v}_2 = (-3 / 25)\, i + j + (4 / 25)\, k$$

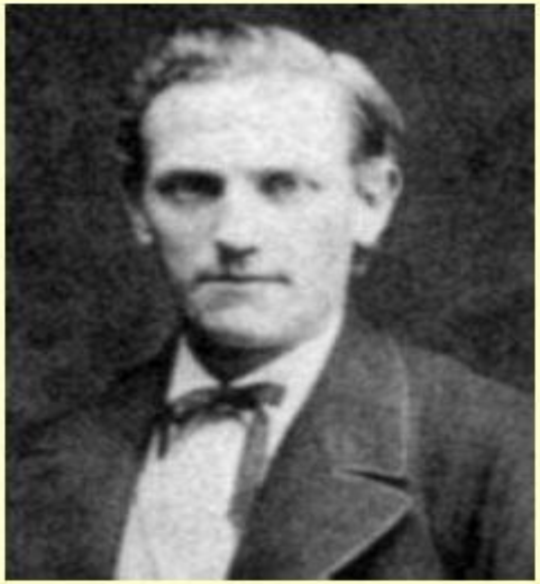
$$\vec{u} - \text{proj}_W \vec{u} = (28 / 25)\, i + (21 / 25)\, k \quad \text{est dans } W^{\perp}$$

Procédé de Gram-Schmidt

Pour appliquer le théorème 11 : il faut une base orthogonale

que faire si la base n'est pas orthogonale?

RÉPONSE: on applique le procédé de Gram-Schmidt



Jorgen GRAM (1850-1916)

Erhard SCHMIDT (1876-1959)

Procédé Gram-Schmidt dans V^3

$B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ une base quelconque de V^3

Construction d'une base orthogonale $B' = (\vec{b'}_1, \vec{b'}_2, \vec{b'}_3)$

$\vec{b'}_1 = \vec{b}_1$ $\quad$ $W1 = [\,\vec{b'}_1\,] = [\,\vec{b}_1\,]$ l'espace engendré par $\vec{b'}_1$

$\vec{b'}_2 = \vec{b}_2 - \mathrm{proj}_{W1}\,\vec{b}_2 = \vec{b}_2 - [\,(\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1) / (\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1)\,]\,\vec{b'}_1$

$W2 = [\,\vec{b'}_1, \vec{b'}_2\,]$ espace engendré par $\vec{b'}_1$ et $\vec{b'}_2$ où $\vec{b'}_2 \,\varepsilon\, W_1^{\perp}$

$\vec{b'}_3 = \vec{b}_3 - \mathrm{proj}_{W2}\,\vec{b}_3$

$= \vec{b}_3 - \{\,[\,(\vec{b}_3 \cdot \vec{b'}_1] / (\vec{b'}_1 \cdot \vec{b'}_1)\,]\,\vec{b'}_1 + [(\vec{b}_3 \cdot \vec{b'}_2) / (\vec{b'}_2 \cdot \vec{b'}_2)\,]\,\vec{b'}_2\,\}$

pour avoir une base orthonormale B'' :

on normalise les vecteurs $\vec{b'}_1, \vec{b'}_2, \vec{b'}_3$

$B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ base (à vérifier) de V^3 où $b_1 = \vec{i} + j + k$ $\vec{b}_2 = i + j$ $b_3 = i$

Remplacer B par une base orthogonale $B' = (b'_1, b'_2, b'_3)$

Procédé de Gram-Schmidt

$B = (\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3})$ base (à vérifier) de $\vec{V^3}$ où $b_1 = \vec{i} + j + k$ $\quad \vec{b_2} = i + j$ $\quad b_3 = i$

Remplacer B par une base orthogonale $B' = (b'_1, b'_2, b'_3)$

__étape__ 1 : $\vec{b'_1} = \vec{b_1} = i + j + k \qquad W1 = [\, \vec{b'_1} \,]$

__étape__ 2 : $\vec{b'_2} = \vec{b_2} - proj_{W1} \vec{b_2} = \vec{b_2} - [\, (\vec{b_2} \bullet \vec{b'_1}) / (\vec{b'_1} \bullet \vec{b'_1}) \,] \vec{b'_1}$

$= \vec{b_2} - (2 / 3) \vec{b'_1} = (i + j - 2k) / 3 \qquad W2 = [\, \vec{b'_1}, \vec{b'_2} \,]$

__étape__ 3 : $\vec{b'_3} = \vec{b_3} - proj_{W2} \vec{b_3} = \vec{b_3} - [\, (\vec{b_3} \bullet \vec{b'_1}) / \vec{b'_1} \bullet \vec{b'_1} \,] \vec{b'_1}$

$- [\, (\vec{b_3} \bullet \vec{b'_2}) / \vec{b'_2} \bullet \vec{b'_2} \,] \vec{b'_2}$

$= \vec{b_3} - (1 / 3) \vec{b'_1} - (1 / 3) / (6 / 9) \vec{b'_2} = (i - j) / 2$

base orthonormale $B'' = \left((i + j + k)/\sqrt{3} \; , \; (i + j - 2k)/\sqrt{6} \; , \; (i - j)/\sqrt{2} \right)$

Procédé de Gram-Schmidt

Théorème 12 : *Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et soit $W = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r]$ un sous-espace vectoriel de V,*
Alors tout vecteur $\vec{u}$ de V peut s'écrire sous la forme $\vec{u} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$ avec $\vec{w}_1 \in W$ et $\vec{w}_2 \in W^{\perp}$.

DÉMONSTRATION

procédé GRAM-SCHMIDT à W pour obtenir la base

orthogonale $B = (u'_1, u'_2, \ldots, u'_r)$

théorème 11 : $\vec{u} = proj_W \vec{u} + (\vec{u} - proj_W \vec{u})$

$= \vec{w}_1 + \vec{w}_2$ $\vec{w}_1 \, \varepsilon \, W$ $\vec{w}_2 \, \varepsilon \, W^{\perp}$

vecteurs colonnes + matrice de transition

but : méthodes pour passer d'une base à une autre base

vecteurs: considérés sous format de colonnes

Définition 2.1 *Une* **base ordonnée** *d'un espace vectoriel* V *est une suite* $B=(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n)$ *de vecteurs tels que l'ensemble* $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ *constitue une base de* V.

Tout vecteur $\vec{v} \in V$ *a une représentation unique*

$$\vec{v} = v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + \ldots + v_n\vec{b}_n$$

où le nombre réel v_i *s'appelle la* $i^{\text{ème}}$ *composante de* $\vec{v}$ *par rapport à* B.

On peut dès lors parler du vecteur colonne $[\vec{v}]_B$ *constitué des composantes de ce vecteur*

$$[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]^t .$$

'exposant' t : *opération de* **transposition**

vecteurs colonnes + matrice de transition

EXEMPLE 2.1

C = (i , j) base usuelle B = (i – j , i + j) autre base

a) écrire $\vec{u} = 2i + j$ comme vecteur colonne dans la base usuelle

b) écrire $\vec{u}$ comme vecteur colonne dans la base B

vecteurs colonnes + matrice de transition

Nous innovons pour votre réussite !

EXEMPLE 2.1

C = (i, j) base usuelle B = (i – j, i + j) autre base

a) écrire $\vec{u} = 2i + j$ comme vecteur colonne dans la base usuelle

b) écrire $\vec{u}$ comme vecteur colonne dans la base B

SOLUTION

a) $\vec{u}$ est déjà décomposé dans la base C: $[\vec{u}]_C = [\ 2 \quad 1\ ]^t$

b) $\vec{u} = c_1\,(i - j) + c_2\,(i + j) = (1/2)\,(i - j) + (3/2)\,(i + j) = 2i + j$

$$[\vec{u}]_B = [\,(1/2) \quad (3/2)\,]^t$$

propriété des vecteurs colonnes

Théorème 13 *Soit* V *un espace vectoriel ayant pour base* $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n)$. *Si* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont des vecteurs de* V *et* c *un scalaire quelconque, alors*

$$[\vec{u} + \vec{v}]_B = [\vec{u}]_B + [\vec{v}]_B$$

et

$$[c\vec{u}]_B = c[\vec{u}]_B .$$

Matrice de transition dans V (V^2 ou V^3)

Cas de V^2

2 bases ordonnées de V^2 $\quad B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2) \quad B' = (\vec{b'}_1, \vec{b'}_2)$

$\vec{u}$ vecteur de V^2 s'écrit d'une manière unique dans chaque base

$$\vec{u} = u_1\vec{b}_1 + u_2\vec{b}_2 \quad \text{et} \quad \vec{u} = u'_1\vec{b'}_1 + u'_2\vec{b'}_2 \qquad (1)$$

$\vec{b'}_1$ et $\vec{b'}_2$ s'exprime dans la base B : B' dans B

$$\vec{b'}_1 = a_{11}\vec{b}_1 + a_{21}\vec{b}_2 \qquad (2)$$

$$\vec{b'}_2 = a_{12}\vec{b}_1 + a_{22}\vec{b}_2 \qquad (3)$$

(2) et (3) dans (1) donne

$$\vec{u} = (a_{11}u'_1 + a_{12}u'_2)\,\vec{b}_1 + (a_{21}u'_1 + a_{22}u'_2)\,\vec{b}_2$$

Écriture matricielle

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} \qquad [u]_B = {}_BP_{B'}\,[u]_{B'}$$

vecteurs colonnes + matrice de transition

Définition 2.2 *Soit* $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ *et* $B' = (\vec{b}'_1, \vec{b}'_2)$ deux bases de V^2. *Alors*

$$_B P_{B'} = [[\vec{b}_1']_B \quad [\vec{b}_2']_B]$$

est dite la **matrice de transition de** B' à B, *et on a*

$$[\vec{u}]_B = {}_B P_{B'} [\vec{u}]_{B'}$$

Définition 2.3 *Soit* $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ *et* $B' = (\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \vec{b}'_3)$ *deux bases de* V^3.

$$_B P_{B'} = \left[[\vec{b}'_1]_B \; [\vec{b}'_2]_B \; [\vec{b}'_3]_B \right]$$

est dite la **matrice de transition de** B' à B, *et on a*

$$[\vec{u}]_B = {}_B P_{B'} [\vec{u}]_{B'} \qquad (1)$$

remarque

inversion de B et B'

dans l'équation (1)

alors

$$({}_{B'}P_B)^{-1} = {}_B P_{B'}$$

$$({}_B P_{B'})^{-1} = {}_{B'}P_B$$

EXEMPLE

$B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ $\quad \vec{b}_1 = i + 2j + k$ $\quad \vec{b}_2 = 2i + 9j + 0k$ $\quad \vec{b}_3 = 3i + 3j + 4k$

$C = (i, j, k)$ base classique

a) Déterminer les composantes de $\vec{u} = i + 2j + 3k$ dans la base B

b) Écrire le vecteur $\vec{v}$ de V^3 dans la base C si $[\vec{v}]_B = [3\ 2\ 1]^t$

SOLUTION

a) $_{C}P_{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $_{B}P_{C} = (\,_{C}P_{B})^{-1} = \begin{bmatrix} -36 & 8 & 21 \\ 5 & -1 & -3 \\ 9 & -2 & -5 \end{bmatrix}$

$$[\vec{u}]_B = \,_{B}P_{C}\,[\vec{u}]_C = [\,43 \quad -6 \quad -10\,]^t = 43\vec{b1} - 6\vec{b2} - 10\vec{b3}$$

b) $\vec{v} = 3\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 + \vec{b}_3 = 3(i + 2j + k) + 2(2i + 9j) + (3i + 3j + 4k)$

$= 10i + 27\,j + 7k$

Soit $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ une base de V^2 $\quad \vec{b}_1 = (i - j) / \sqrt{2}$ $\quad \vec{b}_2 = (i + j) / \sqrt{2}$

$C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ une base de V^2 $\quad \vec{c}_1 = i + 2j$ $\quad \vec{c}_2 = 3i - j$

Déterminer la matrice de transition ${}_{B}P_{C}$ de C à B

SOLUTION

par définition $\quad {}_BP_C = [\ [c_1]_B \quad [c_2]_B\ ]$

Mais B est orthonormale + théorème 9

$$\vec{c_1} = (\vec{c_1} \cdot \vec{b_1})\vec{b_1} + (\vec{c_1} \cdot \vec{b_2})\vec{b_2} = (-1/\sqrt{2})\,\vec{b_1} + (3/\sqrt{2})\vec{b_2}$$

$$\vec{c_2} = (\vec{c_2} \cdot \vec{b_1})b_1 + (\vec{c_2} \cdot \vec{b_2})\vec{b_2} = (4/\sqrt{2})\,\vec{b_1} + (2/\sqrt{2})\vec{b_2}$$

$${}_BP_C = (1/\sqrt{2}) \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcul ${}_{B}P_{B'}$ est simplifié : si B base ortho normale
si B' obtenu de B par Gram-Schmidt

REMARQUE

si on applique le procédé de Gram-Schmidt à une base B

pour obtenir un base orthogonale B' ou une base orthonormale B''

ALORS toutes les matrices de transition entre les bases B, B' et B'' sont

des matrices trianqulaires supérieures.

${}_{B}P_{B'}$ par le calcul des combinaisons linéaires des vecteurs de B' selon B : calcul simple avec diagonale principale constitué de 1

${}_{B}P_{B''}$ calcul est simplifié

EXEMPLE suite de l'exemple

$B = (\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3})$ $\vec{b_1} = i + j + k$ $\vec{b_2} = i + j$ $\vec{b_3} = i$

B' base orthogonale obtenue de B par Gram-Schmidt

B'' base orthonormale obtenue de B par Gram-Schmidt

Déterminer ${}_{B}P_{B'}$ et ${}_{B}P_{B''}$

SOLUTION

étape 1 : $\vec{b'_1} = \vec{b_1} = 1\vec{b_1} + 0\vec{b_2} + 0\vec{b_3}$

étape 2 : $\vec{b'_2} = \vec{b_2} - (2/3)\, b'_1 = (-2/3)\,\vec{b_1} + 1\,\vec{b_2} + 0\,\vec{b3}$

étape 3 : $\vec{b'_3} = \vec{b_3} - (1/3)\,\vec{b'_1} - (1/2)\,(\vec{b'_2} - (2/3)\vec{b_1} = 0\vec{b_1} - (1/2)\vec{b_2} + 1\vec{b_3}$

$$_BP_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$_BP_{B''} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 3/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

avec la base orthonormale B''