Algèbre 4

A. Ramadane, Ph.D.

Chapitres

1. Géométrie vectorielle (rappels)
2. Espaces vectoriels V^2 et V^3
3. Applications linéaires
4. Diagonalisation des matrices
5. Formes quadratiques
6. Applications à la géométrie

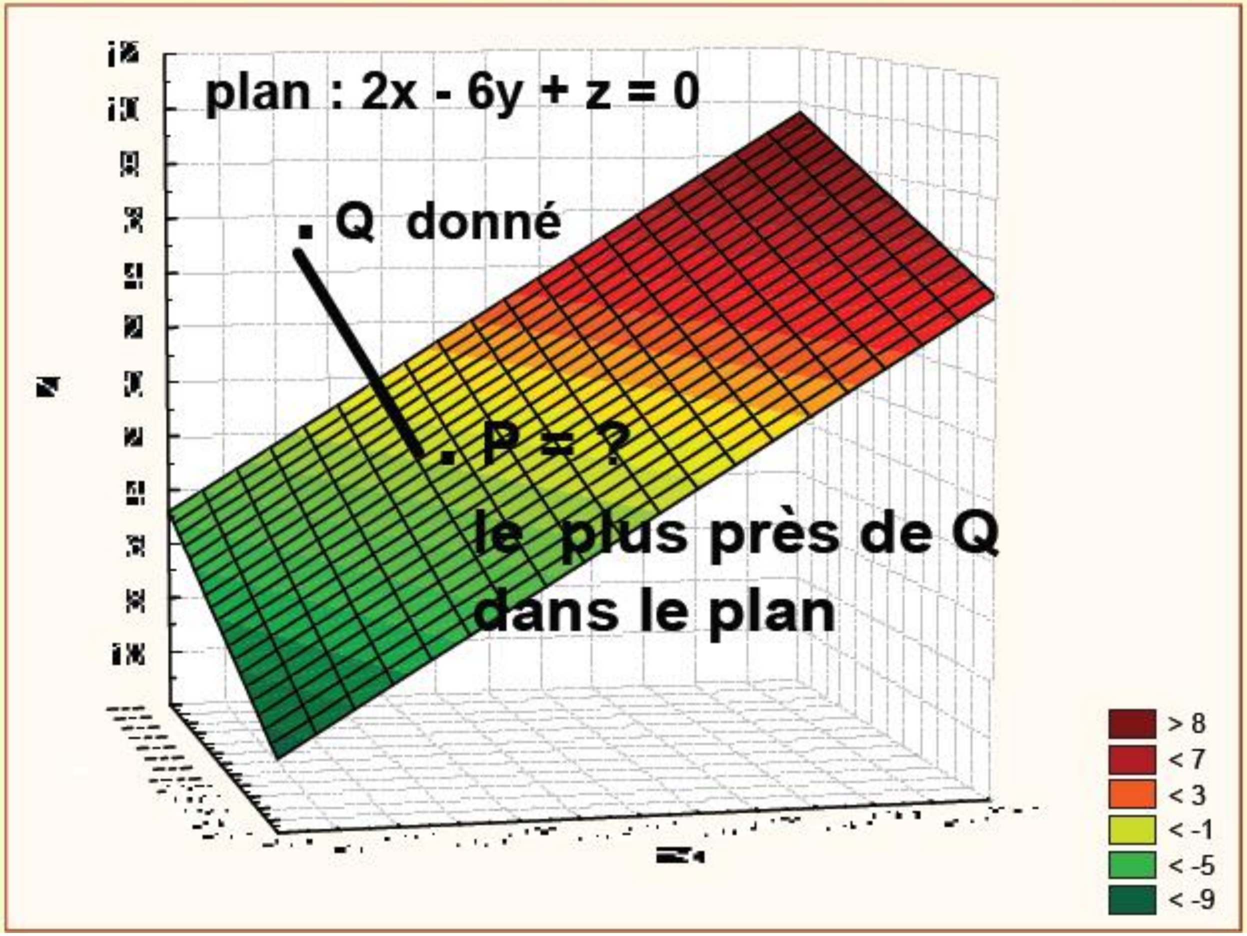
Géométrie vectorielle

1. Coordonnées cartésiennes et vecteurs
2. Produit scalaire
3. - produit vectoriel
   - produit mixte
   - double produit vectoriel
4. Équations de droites et de plans

Exemples de problèmes que vous pourrez résoudre à la fin du cours

Soit Π un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz=d$ et Q un point n'appartenant pas à Π. Quel est le point P de Π le plus près de Q ?

Exemple 1



Exemple 2 **résolution de système d'équations linéaires**

$$\begin{aligned} x + y + \lambda z &= 2 \\ 3x + 4y + 2z &= \lambda \\ 2x + 3y - z &= 1 \end{aligned}$$

Pour quelles valeurs de λ

- il n'y pas de solution
- il y a une solution unique
- il y a plusieurs solutions

Exemple 3 **tranformer** (*sous certaines conditions*) **une matrice A en une matrice diagonale D**

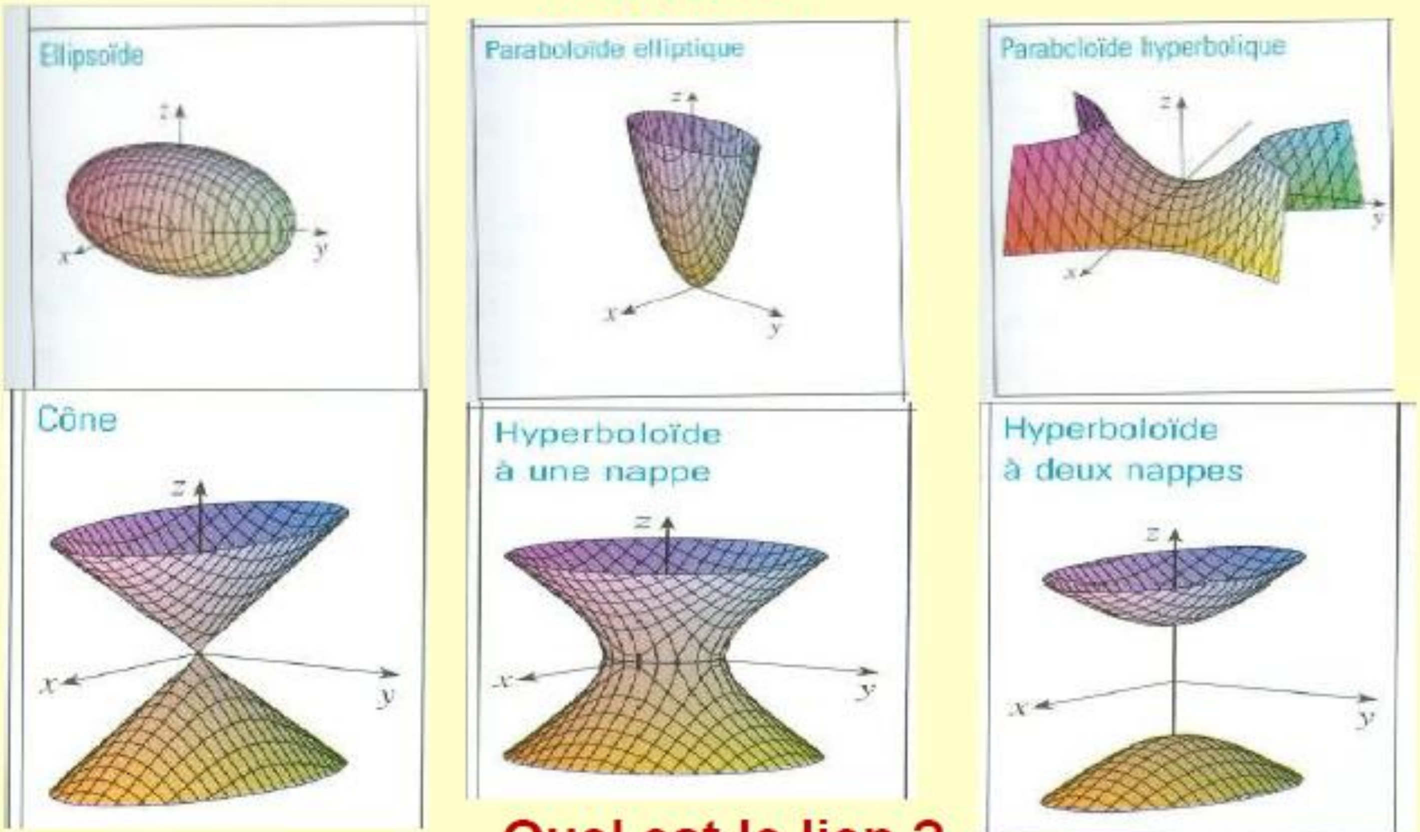
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ 0 & 0 & 0 & & d_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{D}$$

Exemple 4 équation quadratique en 3 variables

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

SURFACES



Quel est le lien ?

René DESCARTES (1596-1650)
philosophe, scientifique,
mathématicien

invente les systèmes de
coordonnées dans le plan
et dans l'espace

liaison
géométrie ⟷ algèbre

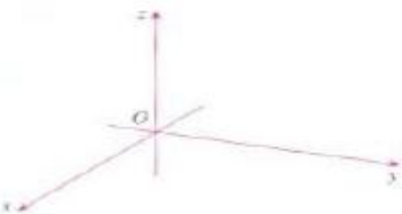


FIGURE 1
Les axes de coordonnées

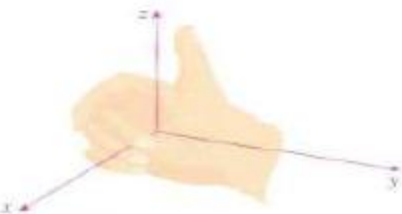
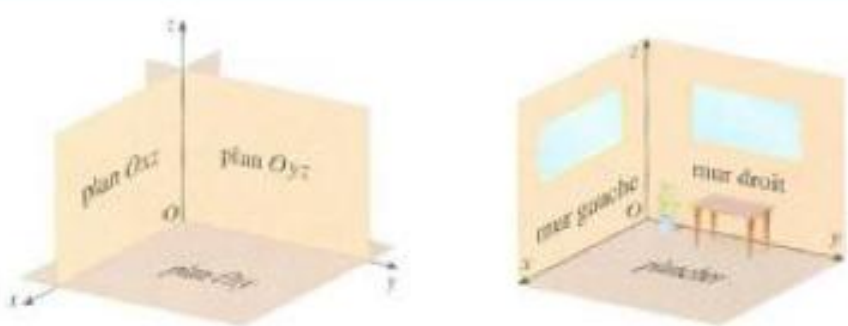


FIGURE 2
La règle de la main droite



a) Les plans de coordonnées b)

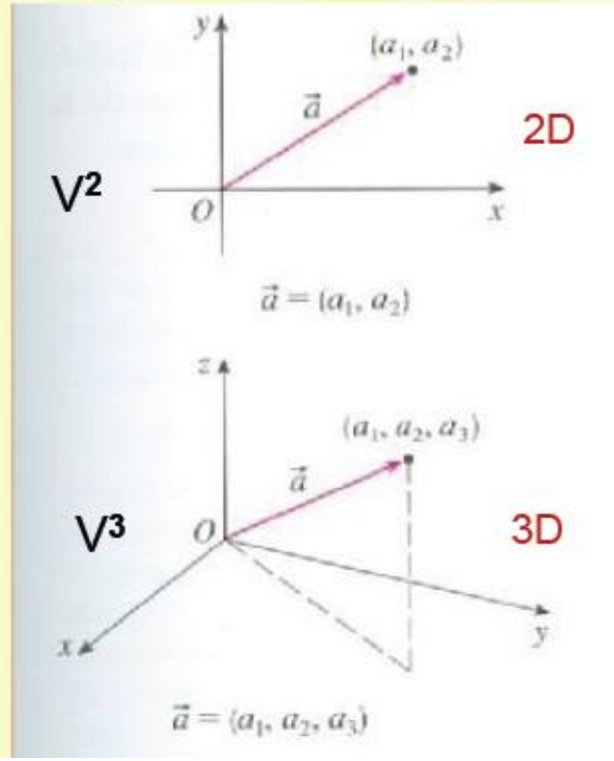
vecteur : grandeur + direction
notation : lettre avec flèche
au dessus $\vec{a}$

Remarque

application des vecteurs en physique et en ingénierie

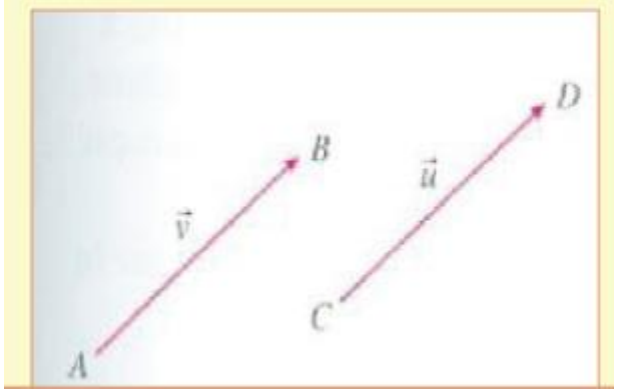
- forces de tension
- forces de compression
- forces de torsion
- vitesse
- accélération
- …

vecteur placé dans un système de coordonnées



(a_1, a_2, a_3) : composantes du vecteur $\vec{a}$ dans un système de coordonnées

V^1 V^4 .... V^n $n \geq 4$ existent-ils?



vecteurs égaux:

même direction
et
même grandeur

deux vecteurs parallèles ?
= deux vecteurs égaux

addition de 2 vecteurs :

loi du triangle   loi du parallélogramme

La figure 3 illustre la définition de l'addition vectorielle. Vous pouvez y voir pourquoi cette définition est parfois appelée le **loi du triangle**.

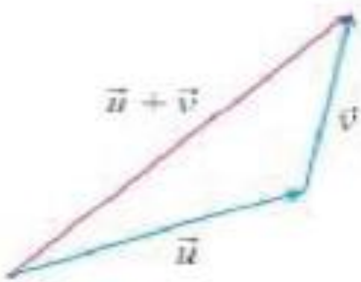


FIGURE 3 La loi du triangle

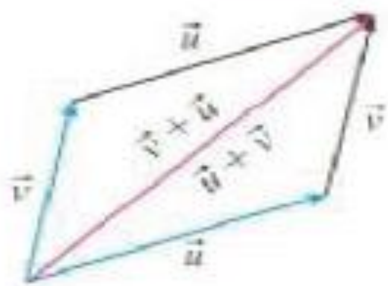


FIGURE 4 La loi du parallélogramme

base standard : $\vec{i}$ $\vec{j}$ $\vec{k}$

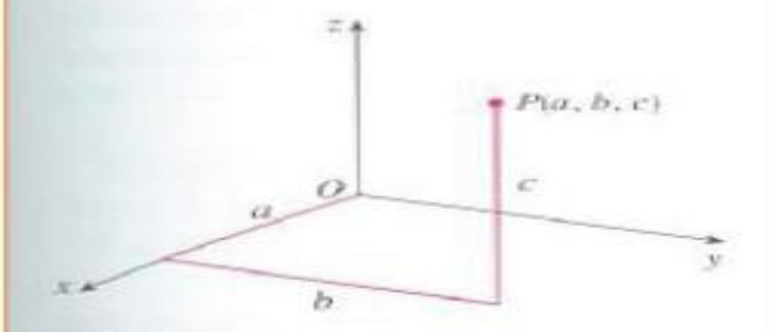
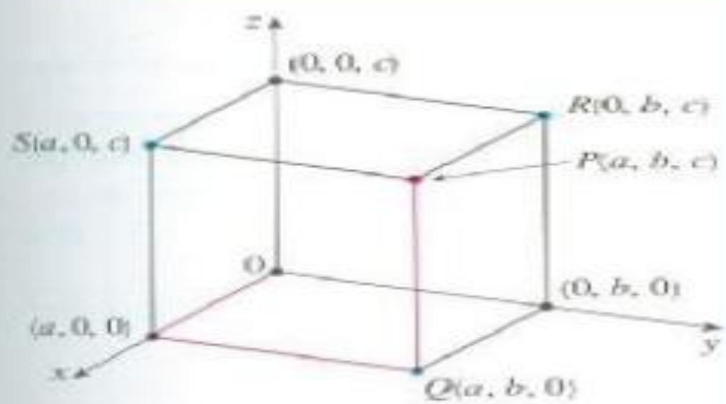


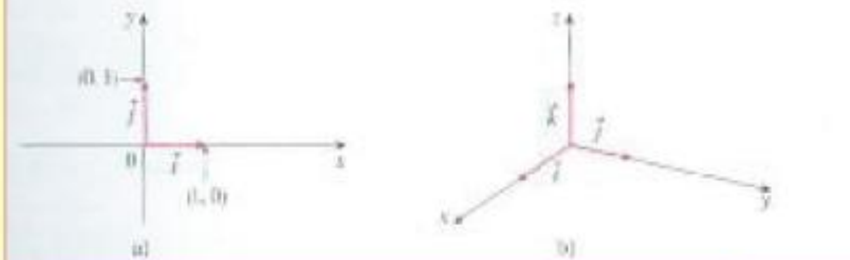
FIGURE 4

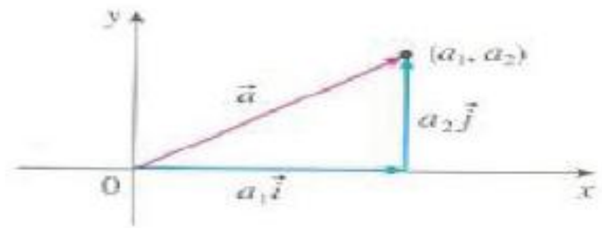
dualité : point ⟷ vecteur



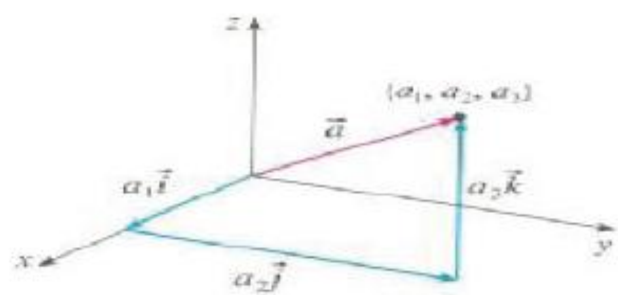
$$\vec{i} = (1, 0, 0) \quad \vec{j} = (0, 1, 0) \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

...cteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont de longueur 1 et pointent dans le sens positif de chaque axe.
...me, en dimension deux, on définit $\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)$ (voyez la figure 17).





a) $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$



b) $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

les composantes d'un vecteur dépendent du système de coordonnées employé

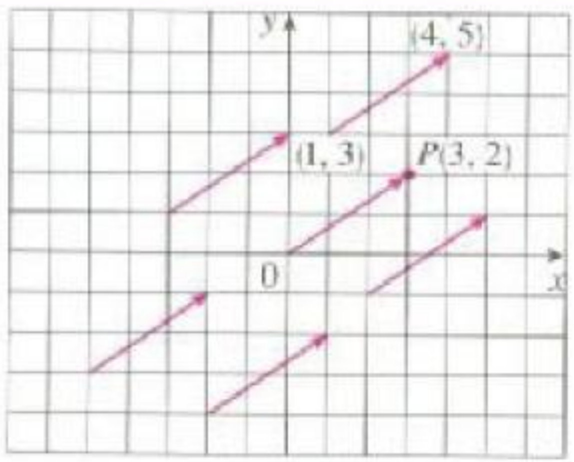


FIGURE 12

Des représentations du vecteur $\vec{a} = (3, 2)$

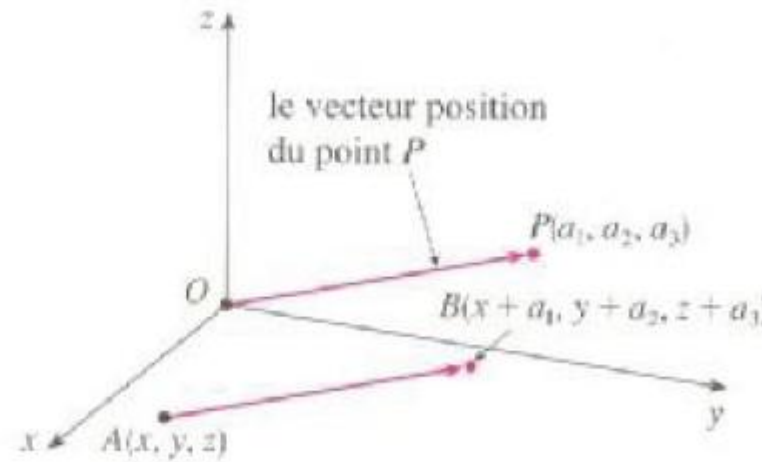


FIGURE 13

Des représentations du vecteur $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$

point P(a_1,a_2,a_3) génère un vecteur $\overrightarrow{OP}$ joignant le point O(0,0,0) et le point P et vice versa

1 Étant donnés les points $A(x_1, y_1, z_1)$ et $B(x_2, y_2, z_2)$, le vecteur $\vec{a}$ représenté par $\overrightarrow{AB}$ est

$$\vec{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

longueur (mesure , norme) d'un vecteur

La longueur d'un vecteur de dimension deux $\vec{a} = (a_1, a_2)$ est égale à

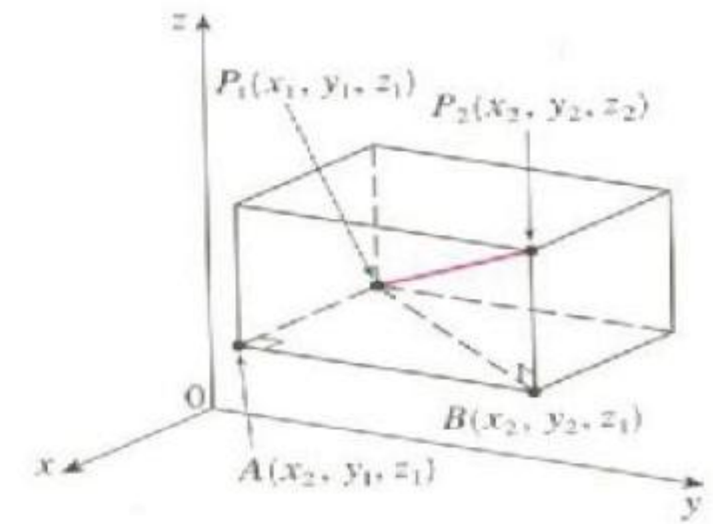
$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

La longueur d'un vecteur de dimension trois $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ est égale à

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

distance entre 2 points P_1 et P_2 dans l'espace

$$| P_1P_2 | = \| \overrightarrow{P_1P_2} \|$$

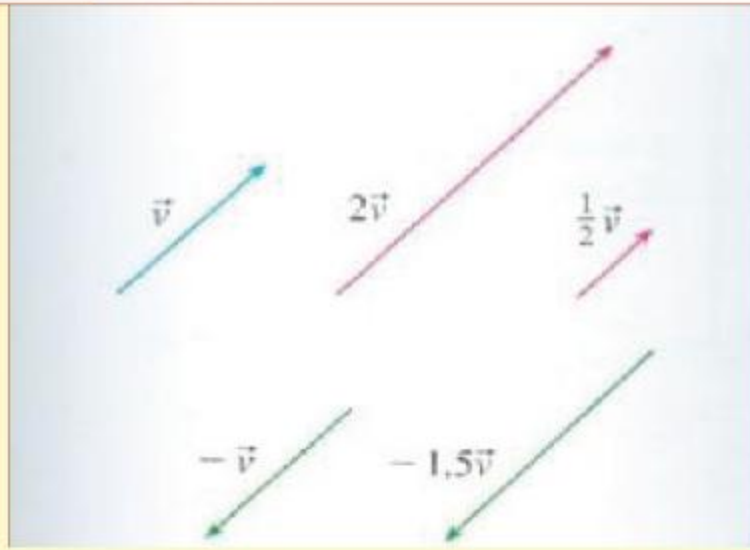


Formule de la distance dans l'espace La distance $|P_1P_2|$ entre les points $P_1(x_1, y_1, z_1)$ et $P_2(x_2, y_2, z_2)$ est égale à

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

Multiplication d'un vecteur $\vec{v}$ par un scalaire (nombre réel) c

Définition de la multiplication scalaire Si c est un scalaire et $\vec{v}$ un vecteur, alors le **multiple scalaire** $c\vec{v}$ est le vecteur qui a même orientation que $\vec{v}$, dont la mesure est $|c|$ fois la mesure de $\vec{v}$ et qui a le même sens que $\vec{v}$ si $c > 0$ et le sens opposé si $c < 0$. Si $c = 0$ ou si $\vec{v} = \vec{0}$, alors $c\vec{v} = \vec{0}$.



Des multiples scalaires de $\vec{v}$

- **addition de vecteurs**
- **multiplication par un scalaire**

dans un système de coordonnées

Si $\vec{a} = (a_1, a_2)$ et $\vec{b} = (b_1, b_2)$, alors

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \quad \vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

$$c\vec{a} = (ca_1, ca_2)$$

De même, pour les vecteurs de dimension trois,

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$(a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

$$c(a_1, a_2, a_3) = (ca_1, ca_2, ca_3)$$

propriété des vecteurs

Les propriétés des vecteurs Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ des vecteurs de V_n et c et d des scalaires. Alors

1. $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$
2. $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$
3. $\vec{a}+\vec{0} = \vec{a}$
4. $\vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{0}$
5. $c(\vec{a}+\vec{b}) = c\vec{a}+c\vec{b}$
6. $(c+d)\vec{a} = c\vec{a}+d\vec{a}$
7. $(cd)\vec{a} = c(d\vec{a})$
8. $1\vec{a} = \vec{a}$

Remarques

1. vecteur $\vec{0}$ n'a pas de direction et sa grandeur est 0

2. le propriétés 1-8 serviront à définir les espaces vectoriels au chapitre suivant

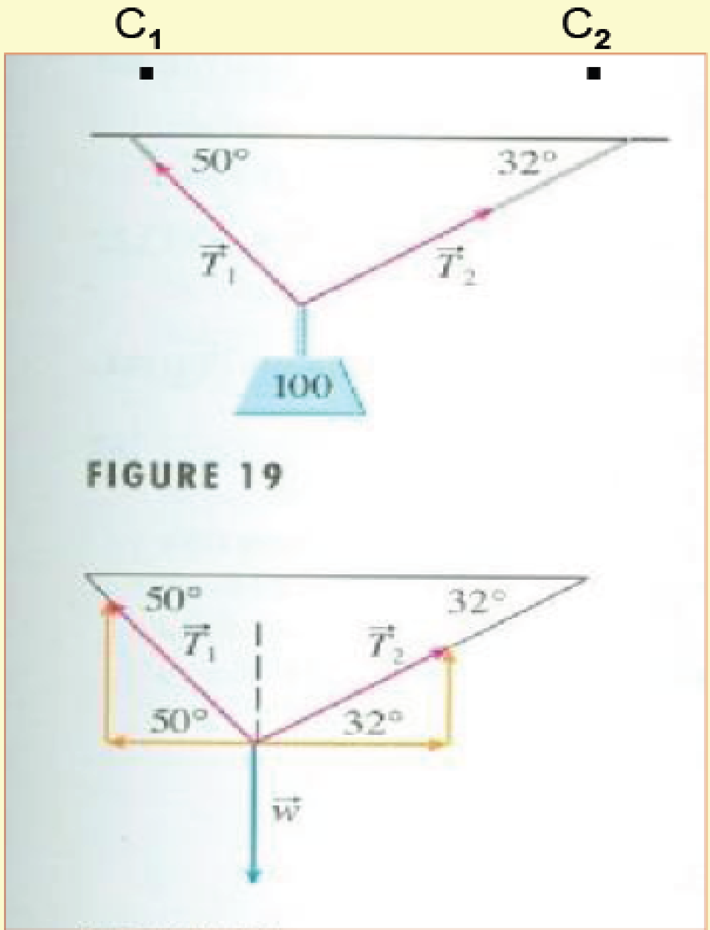


FIGURE 19

Exemple d'application

Deux câbles C_1 et C_2 soutienne un poids de 100 N Illustré à la figure 19

Calculez les tensions (forces) $\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$

ainsi que leur grandeur (module)

SOLUTION …

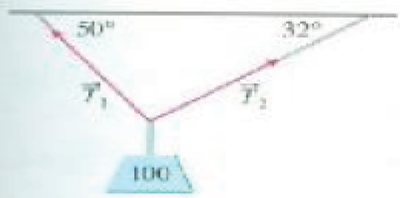
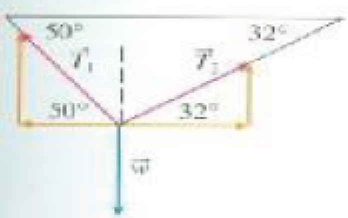


FIGURE 19



SOLUTION

$$\vec{T_1} = -\|\vec{T_1}\|\cos 50^\circ\,\vec{i} + \|\vec{T_1}\|\sin 50^\circ\,\vec{j}$$

$$\vec{T_2} = \|\vec{T_2}\|\cos 32^\circ\,\vec{i} + \|\vec{T_2}\|\sin 32^\circ\,\vec{j}$$

$$\vec{T_1} + \vec{T_2} = -\vec{w} = 100\,\vec{j} = 0\,\vec{i} + 100\,\vec{j}$$

$$-\|\vec{T_1}\|\cos 50^\circ + \|\vec{T_2}\|\cos 32^\circ = 0 \qquad (1)$$

$$\|\vec{T_1}\|\sin 50^\circ + \|\vec{T_2}\|\sin 32^\circ = 100 \qquad (2)$$

de (1) $\|\vec{T}_2\| = \|\vec{T}_1\| \cos 50^o / \cos 32^o$

$= \|\vec{T}_1\| (\sin 32^o / \cos 32^o) \cos 50^o = \|\vec{T}_1\| \,\mathrm{tg}\, 32^o \cos 50^o \quad (3)$

(3) dans (2) $\|\vec{T}_1\| = 100 / (\sin 50^o + \mathrm{tg}\, 32^o \cos 50^o) = 85{,}65 \quad (4)$

(4) dans (3) $\|\vec{T}_2\| = 64{,}9$

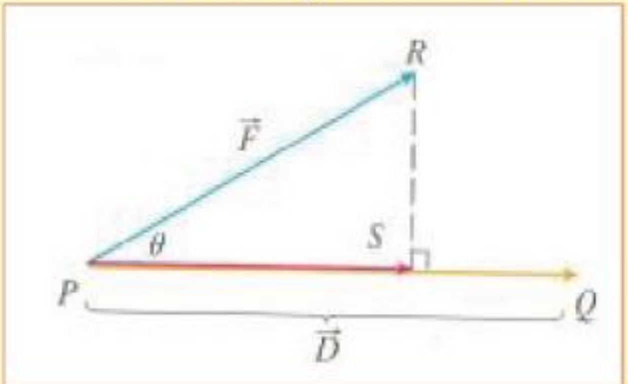
$\vec{T}_1 = -50{,}05\, \vec{i} + 65{,}60\, \vec{j}$

$\vec{T}_2 = 50{,}05\, \vec{i} + 34{,}40\, \vec{j}$

Mise en contexte concept de travail en physique

travail W accompli par une force constante F en déplaçant un objet d'une distance d **dans la direction du mouvement** de l'objet $W = Fd$

Si le déplacement n'est pas dans la direction du mouvement ?



$\| \vec{PS} \| = \| \vec{F} \| \cos\theta$

$W = \| \vec{D} \| \; \| \vec{PS} \| = \| \vec{D} \| \; \| \vec{F} \| \cos\theta$

Définition

le produit scalaire de 2 vecteurs non nuls $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est le nombre

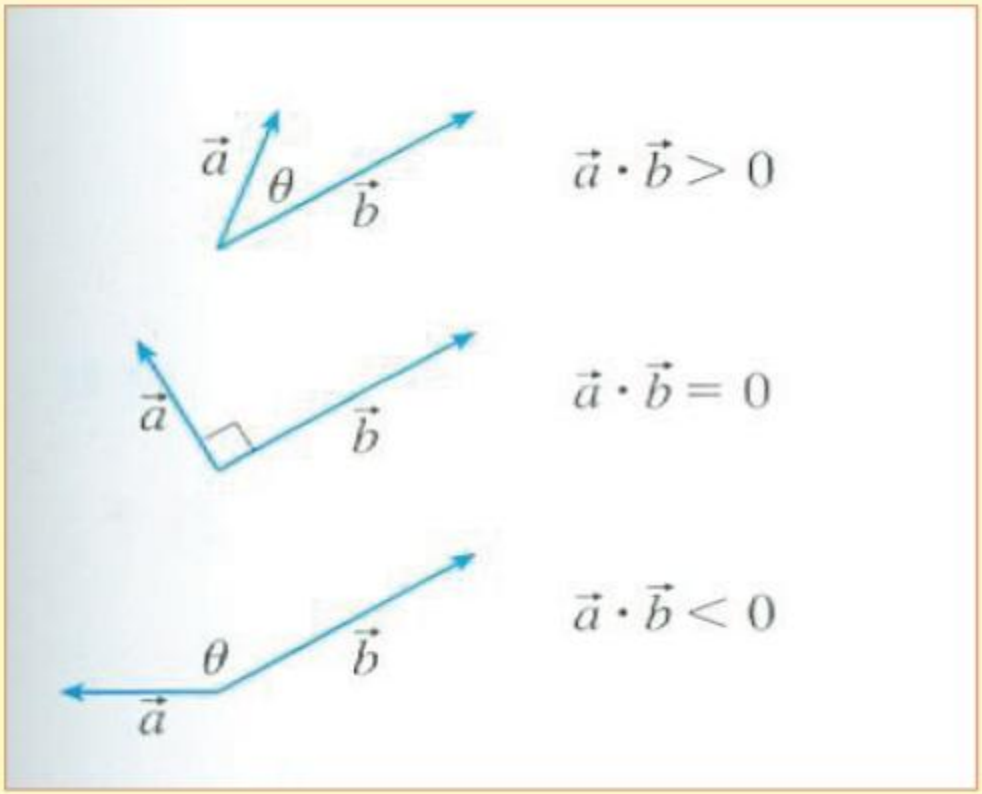
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \| \vec{a} \| \; \| \vec{b} \| \cos\theta \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

θ : le plus petit angle entre les vecteurs

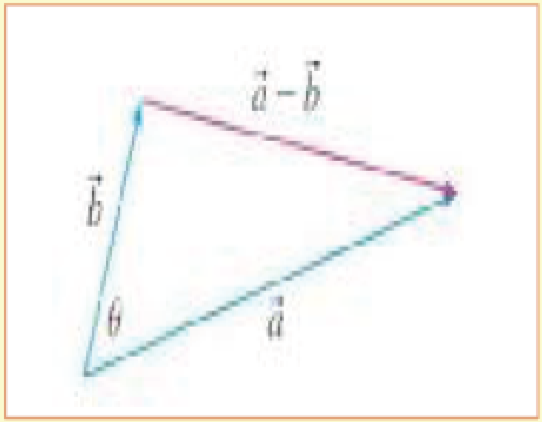
Aussi : $\cos\theta = \vec{a} \cdot \vec{b} \, / \, \| \vec{a} \| \; \| \vec{b} \|$ calcul l'angle θ

$\vec{a}$ et $\vec{b}$ **sont orthogonaux** si

si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$



calcul du produit scalaire avec les composantes



$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

Loi des cosinus

$$\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\,\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta$$

$$= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\,\vec{a} \bullet \vec{b}$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = ½\,[\,\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\,\|\vec{a} - \vec{b}\|^2\,]$$

$$= ½\,[\,a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$$

$$- (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2 - (a_3 - b_3)^2\,]$$

$$\boxed{\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

produit scalaire

propriétés du produit scalaire

1. $\vec{a}\cdot\vec{a} = \|\vec{a}\|^2$

2. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

3. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

4. $(c\vec{a})\cdot\vec{b} = c(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(c\vec{b})$

5. $\vec{0}\cdot\vec{a} = 0$

Exemple d'application

molécule de méthane : CH_4

4 atomes d'hydrogène H

occupent les sommets d'un

tétraèdre régulier et l'atome

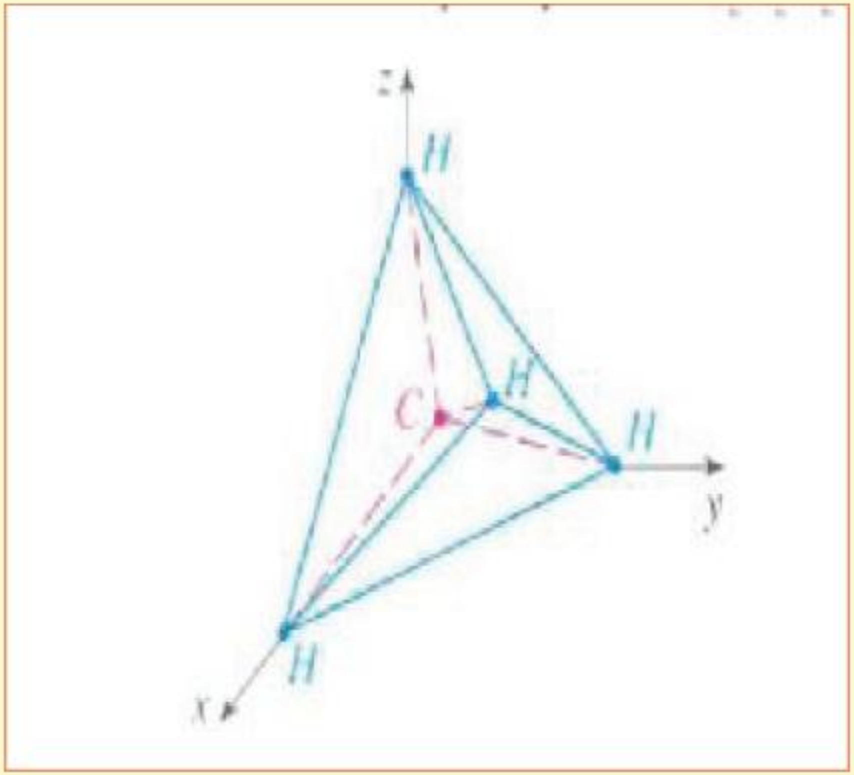
de carbone C occupe le

centre

angle de liaison est formé

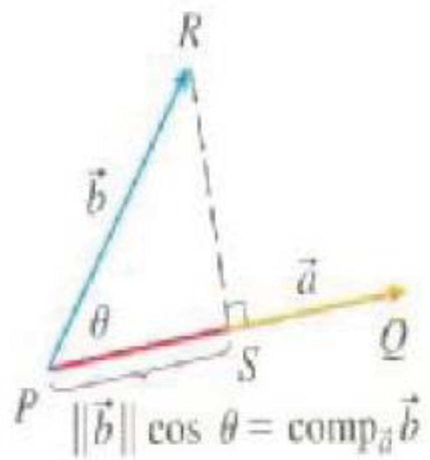
par l'angle joignant H-C-H

angle de liaison = ?



SOLUTION ...

Projection d'un vecteur



point S : désigne le pied de la perpendiculaire abaissée de R sur la droite de support PQ

$\vec{PS}$ = vecteur projection du vecteur $\vec{b}$ sur le vecteur $\vec{a}$ sera noté $\text{proj}_a \vec{b}$

$\|\vec{PS}\|$ = composante (= grandeur) de $\vec{b}$ selon $\vec{a}$

$= \text{comp}_{\vec{a}}\vec{b}$

$= \|\vec{b}\| \cos\theta = \|\vec{b}\| \cos\theta \, \|\vec{a}\| \,/\, \|\vec{a}\|$

$= \vec{a} \cdot \vec{b} \,/\, \|\vec{a}\|$

$\vec{PS} = \text{proj}_a \vec{b} = \|\vec{PS}\| \, (\vec{a} \,/\, \|a\|) = (\vec{a} \cdot \vec{b} \,/\, \|\vec{a}\|^2)\, \vec{a}$

Projection scalaire de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$: $\quad \text{comp}_{\vec{a}}\, \vec{b} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|}$

Vecteur projection de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$: $\quad \text{proj}_{\vec{a}}\, \vec{b} = \left(\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|}\right) \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}\, \vec{a}$.

Exemple

1. calculer la composante et la projection du vecteur $\vec{b} = (1, 1, 2)$ sur le vecteur $\vec{a} = (-2, 3, 1)$

2. montrer que le vecteur $\vec{b} - \text{proj}_a \vec{b} = \text{orth}_a \vec{b}$ est orthogonal à $\vec{a}$

On peut donc écrire $\vec{b} = \text{proj}_{\vec{a}} \vec{b} + \text{orth}_{\vec{a}} \vec{b}$

SOLUTION ...

<u>Exemple</u> : calculer la composante et la projection du vecteur $\vec{b} = (1, 1, 2)$ sur le vecteur $\vec{a} = (-2, 3, 1)$

$\vec{a} = (-2, 3, 1) \qquad \vec{b} = (1, 1, 2)$

$\|\vec{a}\| = [\,(-2)^2 + 3^2 + 1^2\,]^{0,5} = 14^{0,5} = \sqrt{14}$

$\vec{a} \bullet \vec{b} = (-2)(1) + (3)(1) + (1)(2) = 3$

$comp_{\vec{a}}\, \vec{b} = \vec{a} \bullet \vec{b} \;/\; \|\vec{a}\| = 3/\sqrt{14}$

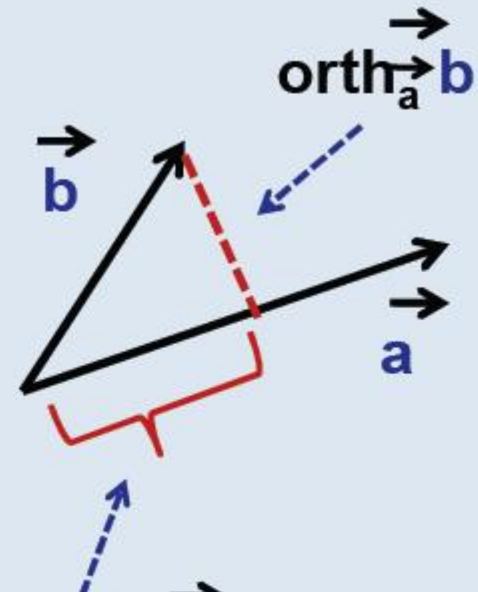
$proj_{\vec{a}}\, \vec{b} = (3/\sqrt{14})\, \vec{a} / \|\vec{a}\| = (3/\sqrt{14})\, \vec{a} / \sqrt{14}$

$= (3/14)\,(-2, 3, 1) = (-6/14, 9/14, 3/14)$

$\vec{b} - proj_{\vec{a}}\, \vec{b} = (1, 1, 2) - (-6/14, 9/14, 3/14)$

$= (20/14, 5/14, 25/14) = orth_{\vec{a}}\, \vec{b}$

$\vec{a} \bullet orth_{\vec{a}}\, \vec{b} = (-2,3,1) \bullet (20/14, 5/14, 25/14) = 0$



$proj_{\vec{a}}\, \vec{b}$

$= (-6/14, 9/14, 3/14)$

Produit vectoriel

Définition Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont des vecteurs de dimension trois non nuls, le **produit vectoriel** de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est le vecteur

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \sin \theta)\vec{n}$$

où θ est l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, et où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire aux deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et dont le sens est donné par la **règle de la main droite** : lorsque les doigts de votre main droite tournent d'un angle θ de $\vec{a}$ jusqu'à $\vec{b}$, alors votre pouce indique le sens de $\vec{n}$. (Voyez la figure 3.)

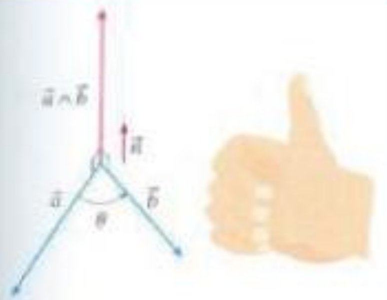


FIGURE 3
La règle de la main droite indique le sens du vecteur $\vec{a} \wedge \vec{b}$.

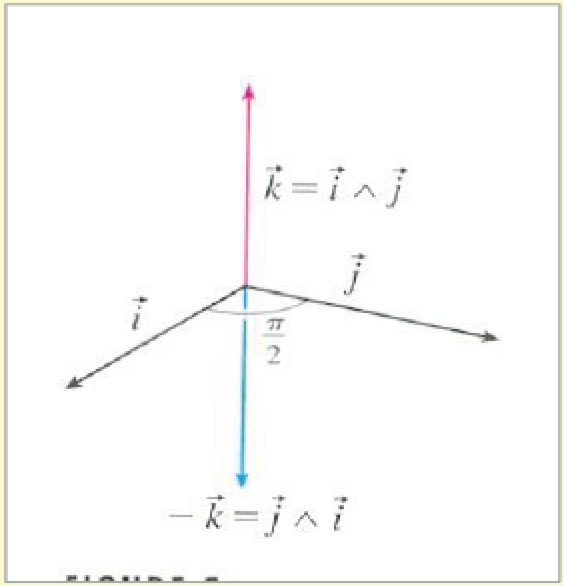
Si l'un des vecteurs $\vec{a}$ ou $\vec{b}$ est le vecteur nul, alors, par définition, $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$. Puisque $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est un multiple scalaire de $\vec{n}$, il a la même direction que $\vec{n}$ et donc

$$\boxed{\vec{a} \wedge \vec{b} \text{ est orthogonal à } \vec{a} \text{ et } \vec{b}.}$$

Si on se rappelle que deux vecteurs non nuls sont parallèles si et seulement si l'angle θ entre eux mesure 0 ou π, on constate qu'alors $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$, puisque dans l'un et l'autre cas $\sin \theta = 0$.

Deux vecteurs non nuls $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont parallèles si et seulement si $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$.

Produit vectoriel



cas particuliers importants

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

mémorisation ?

Exemple

un boulon est serré en appliquant une force $\vec{F}$ de 40 N sur un clé de 0,25 m comme dans la figure.

$\vec{r}$ et $\vec{F}$ font un angle de 75°

Calculer l'intensité du moment de torsion par rapport au centre du boulon

SOLUTION ...

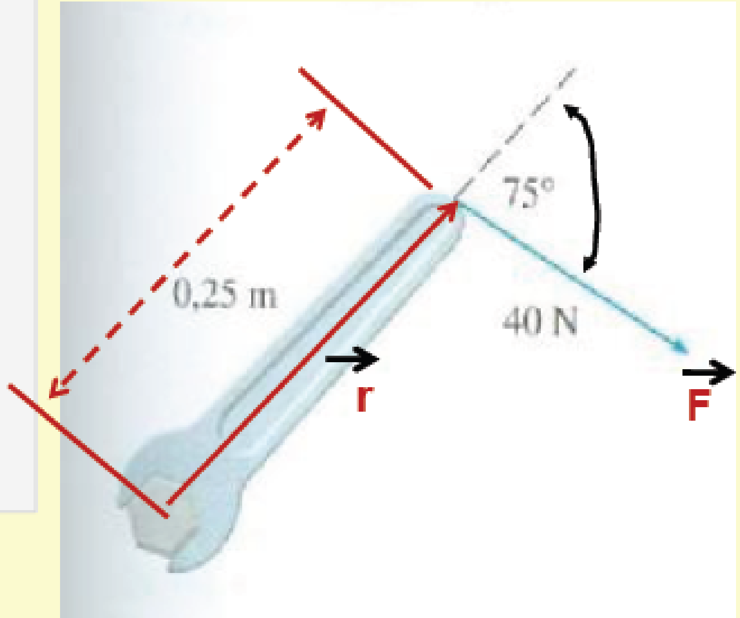


FIGURE 4

Produit vectoriel

SOLUTION

l'intensité (norme) du moment de torsion τ

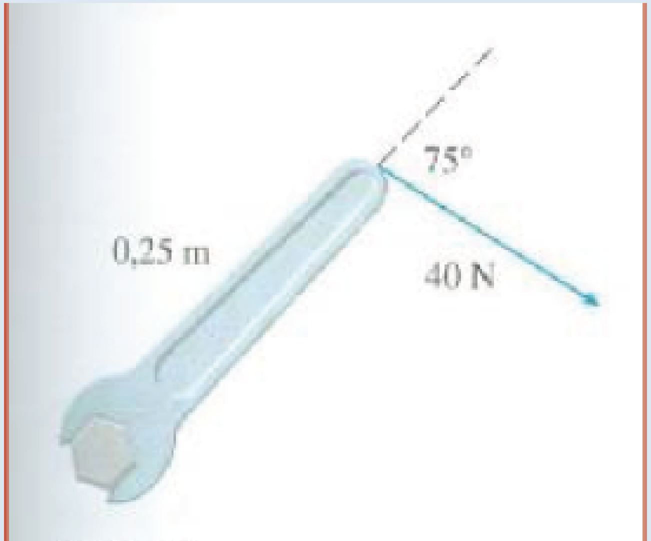


FIGURE 4

$$\|\vec{\tau}\| = \|\vec{r} \wedge \vec{F}\| = \|\vec{r}\|\,\|\vec{F}\| \sin 75^\circ \,\|\vec{n}\|$$

$$= 0{,}25*40 \sin 75^\circ = 10 \sin 75^\circ = 9{,}66 \;\; Nm$$

$$= 9{,}66\ J \qquad\qquad J = Nm = \text{joules}$$

$$\vec{\tau} = \|\vec{\tau}\|\,\vec{n} = 9{,}66\ \vec{n}$$

$\vec{n}$ vecteur unitaire qui pointe en direction de la feuille de dessin

une interprétation géométrique du produit vectoriel

La norme du produit vectoriel $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est égale à l'aire du parallélogramme déterminé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

justification

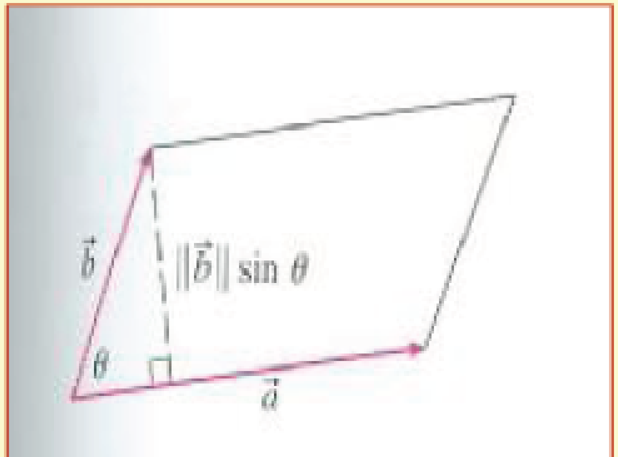


FIGURE 6

$$\text{base} = \|\vec{a}\|$$

$$\text{hauteur} = \|\vec{b}\| \sin\theta$$

$$\text{Aire} = \text{base} \times \text{hauteur}$$

$$= \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \sin\theta$$

$$= \|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$$

Propriétés du produit vectoriel Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont des vecteurs et c un scalaire, alors

1. $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$ **anti commutatif**
2. $(c\vec{a}) \wedge \vec{b} = c(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a} \wedge (c\vec{b})$
3. $\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$
4. $(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c}$

distributivité

Le produit vectoriel n'est pas associatif

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} \neq \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$$

Exemple?

Le produit vectoriel n'est pas associatif

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} \neq \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$$

Exemple?

prenons $\vec{a} = \vec{i}$ $\quad \vec{b} = \vec{j}$ $\quad \vec{c} = \vec{i} + \vec{j}$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (i \wedge j) \wedge (i + j) = k \wedge (i + j)$$
$$= (k \wedge i) + (k \wedge j) = j + - i = -\vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = i \wedge (j \wedge (i + j)) = i \wedge (j \wedge i + j \wedge j)$$
$$= i \wedge (-k) = -i \wedge k = -\vec{j}$$

Évaluation du produit vectoriel en termes de ses composantes

2 Soit $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ et $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Alors,

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$$

justification….

formule difficile à retenir

Évaluation du produit vectoriel en termes de ses composantes

2 Soit $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ et $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Alors,

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Rappel : évaluation d'un déterminant d'ordre 3

3

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

déterminant symbolique

Exemple

a) Déterminer un vecteur perpendiculaire au plan déterminé

par les 3 points P(1, 4, 6) Q(-2, 5, -1) R(1, -1, 1)

b) Aire du triangle de sommets P Q R

SOLUTION …

Exemple

a) Déterminer un vecteur perpendiculaire au plan déterminé par les 3 points $P(1, 4, 6)$ $Q(-2, 5, -1)$ $R(1, -1, 1)$

SOLUTION

$\vec{PQ} \wedge \vec{PR}$ est perpendiculaire à $\vec{PQ}$ et à $\vec{PR}$

$\vec{PQ} = (-2 -1)\vec{i} + (5 - 4)\vec{j} + (-1 -6)\vec{k} = -3\vec{i} + \vec{j} -7\vec{k}$

$\vec{PR} = 0\,\vec{i} - 5\,\vec{j} - 5\,\vec{k}$

$$\vec{PQ} \wedge \vec{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} = (-5 -35)\vec{i} - (15 - 0)\vec{j} + (15 -0)\vec{k}$$

$$= -40\,\vec{i} - 15\vec{j} + 15\vec{k}$$ est $\perp$ au plan

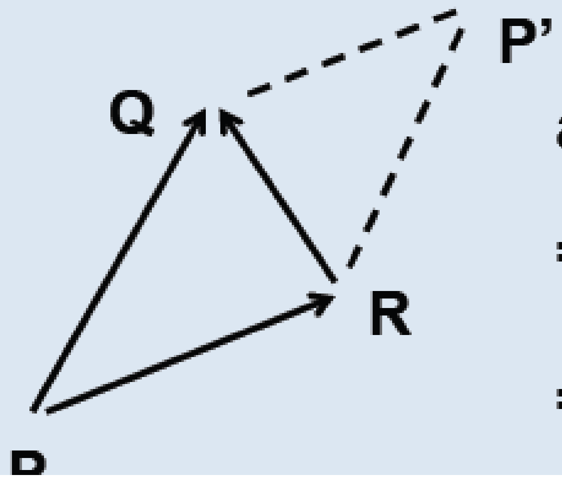
Exemple

b) aire du triangle de sommets P(1, 4, 6) Q(-2, 5, -1) R(1, -1, 1)

SOLUTION

$$\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR} = -40\,\vec{i} - 15\,\vec{j} + 15\,\vec{k}$$

$$\left\| \overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR} \right\| = \left[(-40)^2 + (-15)^2 + (15)^2 \right]^{0,5} = 5\sqrt{82}$$

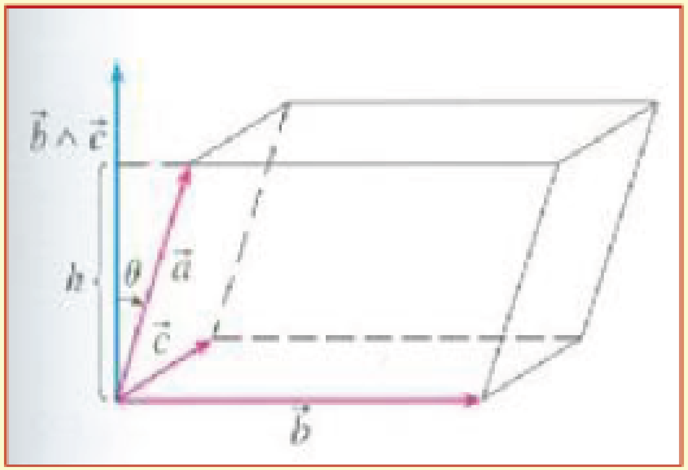


aire du triangle PQR

= ½ aire du parallélogramme PQP'RP

= ½ $5\sqrt{82}$

Produit mixte



$\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$ 3 vecteurs

$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$: produit mixte
c'est un scalaire

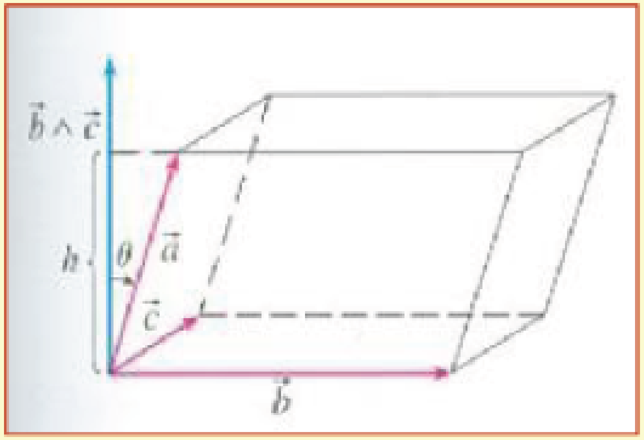
Interprétation géométrique

aire du parallélogramme engendré par $\vec{b}$ et $\vec{c}$ $= \| \vec{b} \wedge \vec{c} \|$

hauteur du parallélépipède $= \| \vec{a} \| \, |\cos \theta|$

Le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ est la norme de leur produit mixte :

$$V = Ah = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})|.$$



$\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$ 3 vecteurs

$\vec{a} \bullet (\vec{b} \wedge \vec{c})$ produit mixte

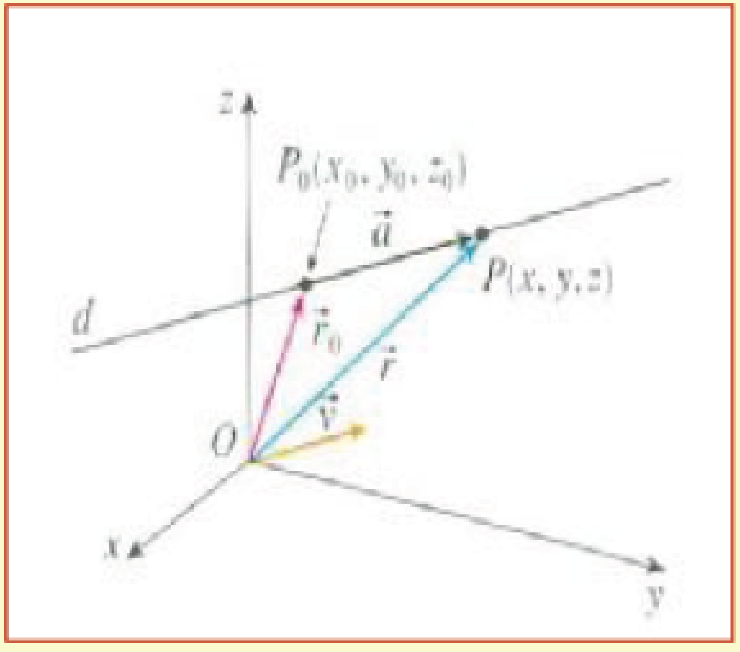
Inversion des rôles de a b c

aire du parallélogramme engendré par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ $= \| \vec{a} \wedge \vec{b} \|$

hauteur du parallélépipède $= \| \vec{c} \| \, |\cos \theta|$

$$\vec{a} \bullet (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{c} \bullet (\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \bullet \vec{c}$$

Équations des droites et des plans



droite d de l'espace de dimension 3

est complètement déterminée si on fixe

- point $P(x_0, y_0, z_0)$ par lequel elle passe
- vecteur direction $\vec{v} = (a, b, c)$ parallèle à d

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{v}$$

équation vectorielle de d

t : paramètre réel

Équation de la droite sous forme paramétrique

$x = x_0 + at \qquad y = y_0 + bt \qquad x = z_0 + ct$

forme la plus utilisée

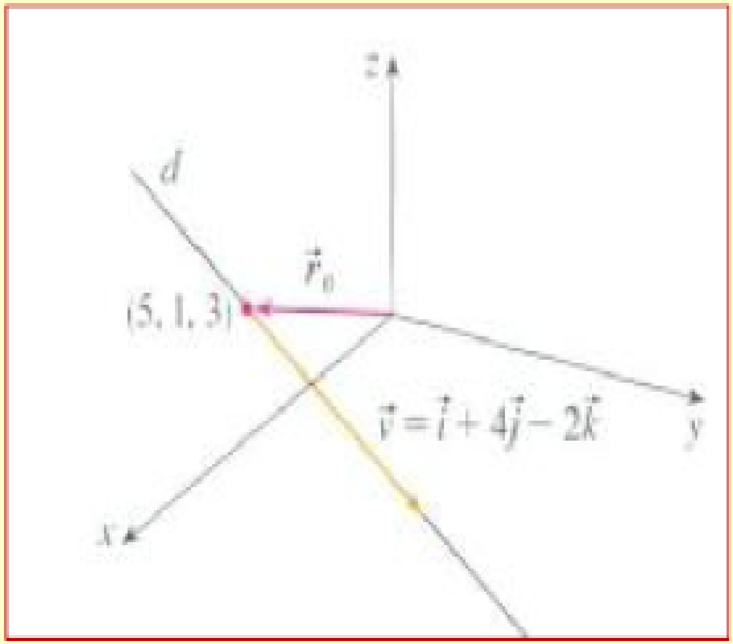
si $a, b, c \neq 0$ équations symétriques de d

$$(x - x_0) / a = (y - y_0)/b = (z - z_0) / c$$

comment écrire si $a = 0$?

Exemple

Écrire une équation vectorielle et les équations paramétriques de la droite qui passe par le point (5, 1, 3) et parallèle au vecteur $\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$



$\vec{r}_0 = 5\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$

$\vec{v} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$

l'équation vectorielle

$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$

$= (5+t)\vec{i} + (1+4t)\vec{j} + (3-2t)\vec{k}$

équations paramétriques

$$x = 5 + t \qquad y = 1 + 4t \qquad z = 3 - 2t$$

Équations des droites et des plans

Exemple

montrer que les droites d_1 et d_2

d_1 : $x = 1 + t \qquad y = -2 + 3t \qquad z = 4 - t$

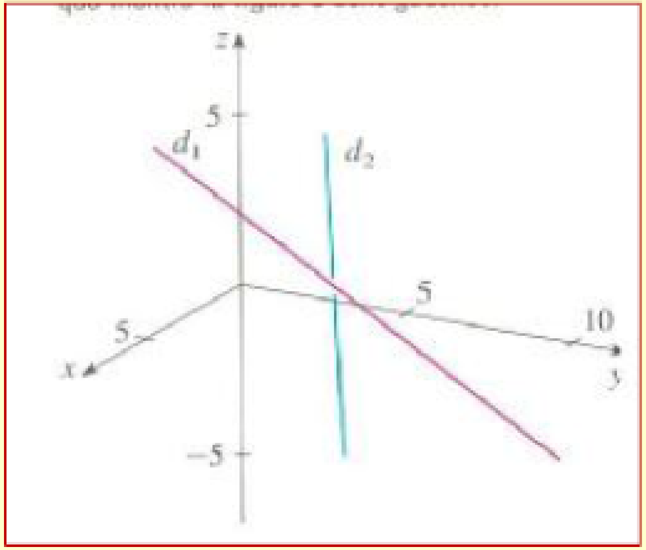
d_2 : $x = 2s \qquad y = 3 + s \qquad z = -3 + 4s$

sont **GAUCHES**

= ne se coupent pas et ne sont pas parallèles

i.e. ne sont pas dans un même plan

SOLUTION ….



SOLUTION

(1, 3, -1) et (2, 1, 4) ne sont pas proportionnels
droites ne sont pas parallèles

point en commun?

$$1 + t = 2s \quad (1)$$
$$-2 + 3t = 3 + s \quad (2)$$
$$4 - t = -3 + 4s \quad (3)$$

solution de (1) et (2) $t = 11/5$ et $s = 8/5$
vérifie pas l'équation (3)

Plans

plan π est déterminé par

- point $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dans le plan
- vecteur $\vec{n}$ orthogonal au plan

$P(x, y, z)$: point quelconque de π

$\vec{r_0}$: vecteur position de P_0

$\vec{r}$: vecteur position de P

$\overrightarrow{r - r_0}$: vecteur dans le plan π

forme vectorielle

$$\vec{n} \cdot (\overrightarrow{r - r_0}) = 0$$

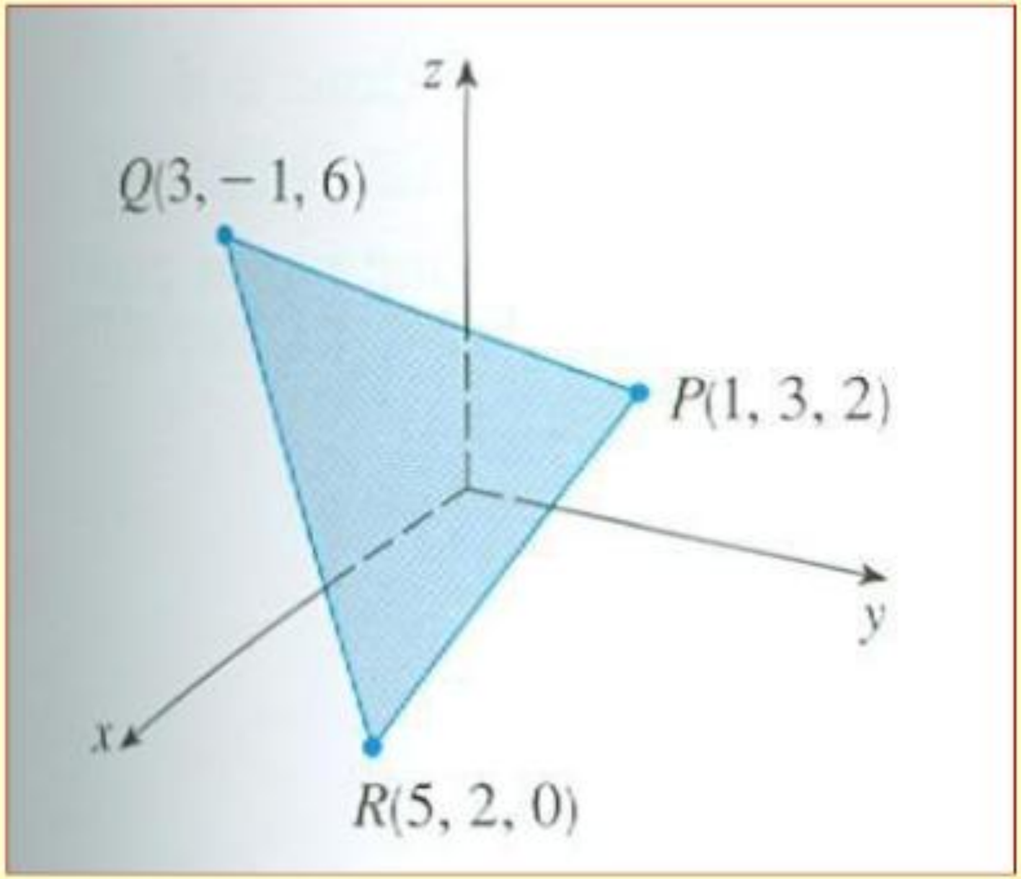
forme scalaire

$$\vec{n} = (a, b, c) \qquad \vec{r} = (x, y, z) \qquad \vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

Exemple équation du plan déterminé par les points P(1, 3, 2) Q(3, -1, 6) R(5, 2, 0)



$\overrightarrow{PQ} = (2, -4, 4)$ $\overrightarrow{PR} = (4, -1, -2)$

sont dans le plan

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 12\vec{i} + 20\vec{j} + 14\vec{k}$$

équation : $12(x-1) + 20(y-3) + 14(z-2) = 0$

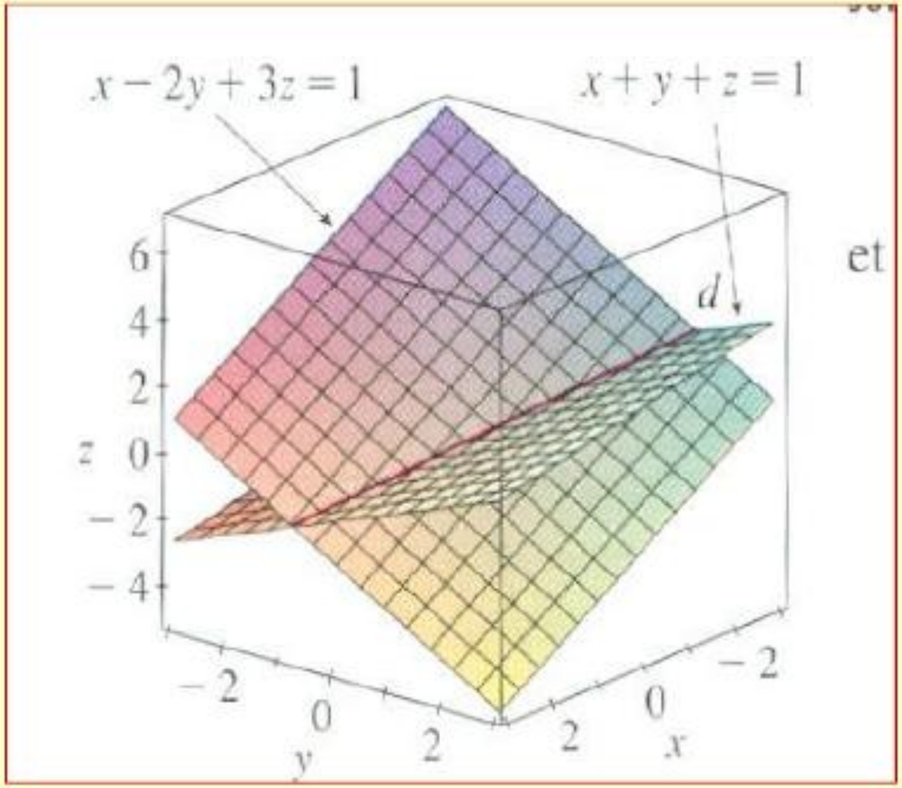
2 plans sont parallèles **SI** leurs vecteurs normaux sont parallèles

Plans

Exemple

a) angle entre les plans $x + y + z = 1$ et $x - 2y + 3z = 1$

b) équation de la droite d d'intersection



Exemple

a) angle entre les plans $x + y + z = 1$ et $x - 2y + 3z = 1$

a) $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$ $\vec{n}_2 = (1, -2, 3)$

θ = angle entre les 2 plans

$$\cos\theta = \vec{n1} \cdot \vec{n2} / (\|\vec{n1}\| \, \|\vec{n2}\|) = 2 / (\sqrt{3}\,\sqrt{14})$$
$$= 0{,}3086$$

$$\theta = \mathrm{ArcCos}(0{,}3086) = 72^\circ$$

b) un point P de d disons avec $z = 0$ $x+y=1$ et $x-2y=1$

alors $x=1$ et $y = 0$ et le point $P(1, 0, 0)$

d est perpendiculaire aux 2 vecteurs normaux n_1 et n_2

$\vec{v}$ vecteur parallèle à d

$\vec{v} = \vec{n1} \wedge \vec{n2} = 5\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$

équations symétrique de d $(x - 1) / 5 = y / -2 = z / -3$

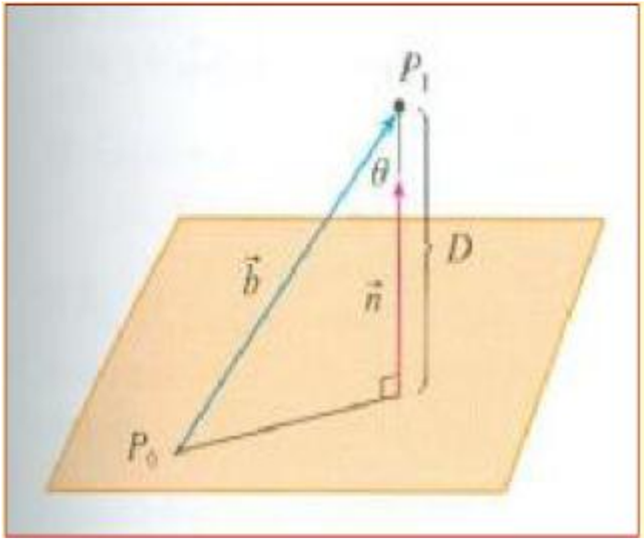
= intersection de 2 plans: $(x-1)/5 = y/-2$ et $y/-2 = z/-3$

Plans

Formule de la distance D d'un point $P_1(x_1, y_1, z_1)$ à un plan

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$D = | ax_1 + by_1 + cz_1 + d | / (a^2 + b^2 + c^2)^{0,5}$$



$P_0(x_0, y_0, z_0)$ point quelconque du plan

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$$

$\vec{b}$ = vecteur $\overrightarrow{P_0P_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$

$\vec{n} = (a, b, c)$ vecteur normal au plan

$$D = | \mathrm{comp}_n \vec{b} | = | \vec{n} \cdot \vec{b} | / \| \vec{n} \|$$

Exemple

quelle est la distance entre les 2 plans parallèles

$10x + 2y - 2z = 5$ (plan $\pi 1$) et $5x + y - z = 1$ (plan $\pi 2$)

SOLUTION

plans sont parallèles? oui car leurs vecteurs normaux (10, 2, -2) (5, 1, -1) sont proportionnels

on choisit un point quelconque du plan $\pi 1$:

$y = z = 0$ donne $x = ½$ point $P_1(½, 0, 0)$

distance D de P_1 au plan $\pi 2$

$$D = | 5(½) + 1(0) + (-1)(0) - 1 | \;/\; (5^2 + 1^2 + (-1)^2)^{0,5}$$

$$= (3/2) / \sqrt{27} = (3/2) / 3\sqrt{3} = \sqrt{3} / 6$$