Applications Linéaires

A. Ramadane, Ph.D.

Applications* linéaires

1. introduction
2. définition et propriétés
3. représentation matricielle
4. changement de base
5. opérations sur les applications linéaires
6. noyaux et images
7. applications régulières et inverses

* applications = fonctions = transformations

introduction

concept de fonction f $\quad f : X \rightarrow Y \quad y = f(x)$

X : ensemble de départ Y : ensemble d'arrivée

Exemples

1. $y = f(x) = x^2$ $\quad X =$ • (nombres réels) $\quad Y =$ • + (réels positifs)
2. $y = \sin(x)$ $\quad X =$ • $\quad Y = [-1, 1]$
3. $y = \|\vec{u}\|$ $\quad X = V^2$ ou V^3 $\quad Y =$ • +
4. $f : V \longrightarrow V$ $\quad V = V^2$ ou V^3

catégorie importante de fonctions f : celles qui sont **LINÉAIRES**

Définition et propriétés

Définition 3.1 *Si $T : V \to V$ est une fonction de l'espace vectoriel V, alors T est appelée une* **application linéaire** *si, pour tous les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de V et pour tout scalaire ℓ, on a*

$$T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) \qquad (1)$$

$$T(\ell\vec{u}) = \ell T(\vec{u}). \qquad (2)$$

Exemples et cas particuliers

1. **Application nulle 0 :** $0(\vec{u}) = \vec{0}$
2. **Application identique id :** $id(\vec{u}) = \vec{u}$
3. **L'homothétie H :** $H(\vec{u}) = c\,\vec{u}$ c un scalaire $c > 1$: dilatation

   $0 < c < 1$: contraction
4. $T(xi + yj) = (x - y)\, i + (x + y)\, j$ est linéaire …. à vérifier

Définition et propriétés

Théorème 15 *Si* $T : V \to V$ *est une application linéaire, alors*

(a) $T(\vec{0}) = \vec{0}$

(b) $T(-\vec{u}) = -T(\vec{u})$ *quel que soit* $\vec{u}$ *dans* V

(c) $T(k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + \ldots + k_n\vec{u}_n)$
$$= k_1T(\vec{u}_1) + k_2T(\vec{u}_2) + \ldots + k_nT(\vec{u}_n)$$
quels que soient $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ *dans* V *et quels que soient* $k_1, k_2, \ldots, k_n$ *dans* $\mathbb{R}$.

Représentation matricielle

Représentation matricielle

Objectif: toute application linéaire peut se représenter par une matrice

Manipulations des applications linéaires: à faire avec le calcul matriciel

Cas de V^2 T : application linéaire $u \, \varepsilon \, V^2$

base $B = (\vec{b_1}, \vec{b_2})$ $\vec{u} = u_1\vec{b_1} + u_2\vec{b_2}$ $[\,u\,]_B = [\,u_1 \;\; u_2\,]^t$

$$T(\vec{u}) = T\,(u_1\vec{b_1} + u_2\vec{b_2}) = u_1T(\vec{b_1}) + u_2T(\vec{b_2})$$

$$= u_1\,(a_{11}\vec{b_1} + a_{21}\vec{b_2}) + u_2\,(a_{12}\vec{b_1} + a_{22}\vec{b_2})$$

$$= (u_1a_{11} + u_2a_{12})\vec{b_1} + (u_1a_{21} + u_2a_{22})\vec{b_2}$$

$$[\,T(\vec{u})\,]_B = \begin{bmatrix} u_1a_{11} + u_2a_{12} \\ u_1a_{21} + u_2a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} [u]_B$$

À toute application linéaire T est associée une matrice A dans une base donnée
Toute matrice A définie une transformation linéaire T dans une base

Représentation matricielle

Définition 3.2 Soit T une application linéaire de V^2 dans V^2. *La* **matrice représentative** *de* T *dans la base* $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ *est définie par*

$$[T]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

où les colonnes de $[T]_B$ *sont les composantes de* $T(\vec{b}_1)$ *et de* $T(\vec{b}_2)$ *dans la base* B. *De plus,* $[T(\vec{u})]_B = [T]_B\,[\vec{u}]_B$ *pour tout vecteur* $\vec{u}$ *de* V^2.

Cas de V^3 base $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$

$$T(\vec{b}_1) = a_{11}\vec{b}_1 + a_{21}\vec{b}_2 + a_{31}\vec{b}_3$$
$$T(\vec{b}_2) = a_{12}\vec{b}_1 + a_{22}\vec{b}_2 + a_{32}\vec{b}_3$$
$$T(\vec{b}_3) = a_{13}\vec{b}_1 + a_{23}\vec{b}_2 + a_{33}\vec{b}_3,$$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Si on utilise la base usuelle de V^3 B = (i, j, k)

$$T(i) = 2i + j + 5k$$
$$T(j) = -i + 5j + 0k$$
$$T(k) = 4i + j + 2k$$

Exemple cas de la transformation identique dans le plan V^2

$$\text{matrice associée} = \text{matrice identité} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

quel que soit la base choisie

Représentation matricielle

Exemple

projection orthogonale sur un vecteur $\vec{a}$

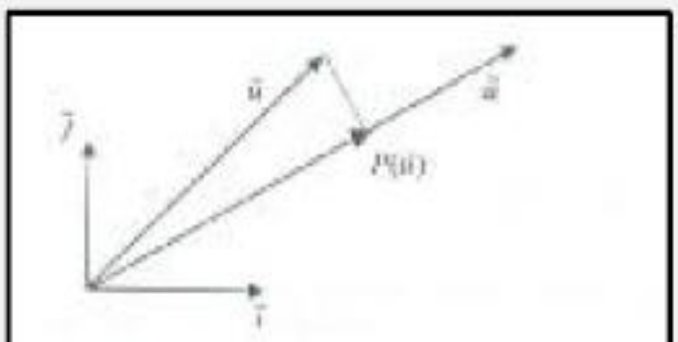


Figure 4 : Projection orthogonale sur le vecteur $\vec{a}$

Exemple

cisaillement dans la direction de l'axe X dans le plan V^2

$$C(x, y) = (x + k\,y)\,i + y\,j \qquad k \neq 0$$

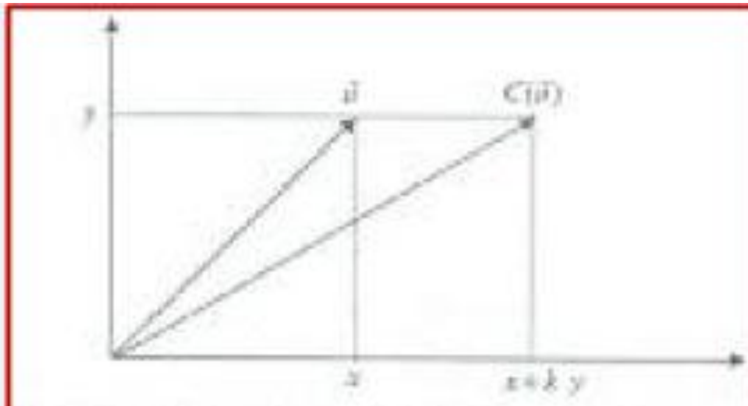


Figure 5 : Cisaillement de rapport k dans la direction de x

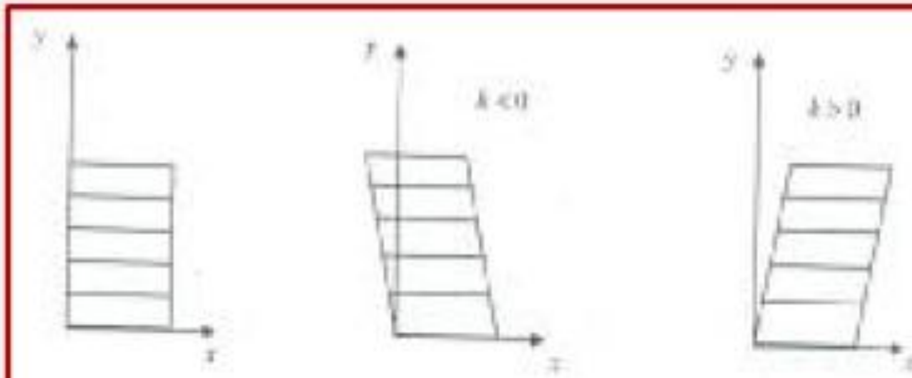


Figure 6 : Cisaillement du rectangle dans la direction de x

Exemple symétrie orthogonale par rapport au plan XY

(x, y, z) devient $(x, y, -z)$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemple projection orthogonale d'un vecteur $\vec{u}$ sur un vecteur $\vec{a}$

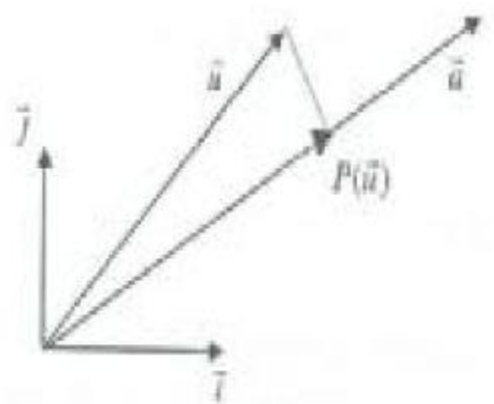


Figure 4 : Projection orthogonale sur le vecteur $\vec{a}$

$$Proj_{\vec{a}}(\vec{u}) = P_{\vec{a}}(\vec{u}) = [(\vec{u} \cdot \vec{a}) / (\vec{a} \cdot \vec{a})]\ \vec{a}$$

$P_{\vec{a}}(\vec{u})$ application linéaire?

$$P_{\vec{a}}(\vec{u} + c\vec{v}) = [(\vec{u} + c\vec{v}) \cdot \vec{a} / (\vec{a} \cdot \vec{a})]\vec{a}$$

$$= [(\vec{u} \cdot \vec{a}) + c(\vec{v} \cdot \vec{a}) / (\vec{a} \cdot \vec{a})]\vec{a}$$

$$= [(\vec{u} \cdot \vec{a}) / (\vec{a} \cdot \vec{a})]\vec{a} + c[(\vec{v} \cdot \vec{a}) / (\vec{a} \cdot \vec{a})]\vec{a}$$

$$= P_{\vec{a}}(\vec{u}) + c\, P_{\vec{a}}(\vec{v})$$

Rép : OUI

à calculer $[P_a]_B = [\,[P_a(i)]_B \quad [P_a(j)]_B\,]$ base $B = (i, j)$

$\vec{a} = a_1\, i + a_2\, j$

$P_{\vec{a}}(i) = (i \cdot \vec{a})/(\vec{a} \cdot \vec{a})\, \vec{a} = a_1/(a_1^2 + a_2^2)\,(a_1 i + a_2 j) = a_1^2 i + a_1 a_2 j / (a_1^2 + a_2^2)$

$P_{\vec{a}}(j) = a_2 a_1\, i + a_2^2\, j / (a_1^2 + a_2^2)$

$P_{\vec{a}}(i) = (i \cdot \vec{a})/(\vec{a} \cdot \vec{a})\, \vec{a} = a_1/(a_1^2 + a_2^2)\,(a_1 i + a_2 j) = a_1^2 i + a_1 a_2 j \,/\, (a_1^2 + a_2^2)$

$P_{\vec{a}}(j) = a_2 a_1\, i + a_2^2\, j \,/\, (a_1^2 + a_2^2)$

$$[P_{\vec{a}}(i)]_B = (1/(a_1^2 + a_2^2)) \begin{bmatrix} a1^2 \\ a_2 a_1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [P_{\vec{a}}(j)]_B = (1/(a_1^2 + a_2^2)) \begin{bmatrix} a_1 a_2 \\ a_2^2 \end{bmatrix}$$

$$[P_{\vec{a}}]_B = (1/(a_1^2 + a_2^2)) \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 \\ a_2 a_1 & a_2^2 \end{bmatrix}$$

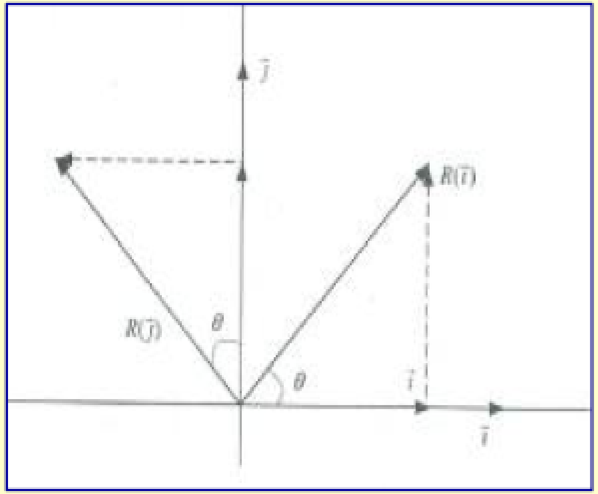
<u>**image**</u> **de $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$** $\quad [P_{\vec{a}}(\vec{u})]_B = [P_a]_B\, [\vec{u}]_B =$

$$= (1/(a_1^2 + a_2^2)) \begin{bmatrix} a_1^2u_1 & a_1a_2u_2 \\ a_2a_1u_1 & a_2^2u_2 \end{bmatrix}$$

$$P(\vec{u}) = [(a_1^2u_1 + a_1a_2u_2)/(a_1^2 + a_2^2)]\,\vec{i} + [(a_1a_2u_1 + a_2^2u_2)/(a_1^2 + a_2^2)]\,\vec{j}$$

Représentation matricielle

Exemple dans V^2 rotation d'un angle θ base usuelle (i, j)



$$\overrightarrow{R_\theta}(i) = \cos\theta\, i + \sin\theta\, j$$

$$\overrightarrow{R_\theta}(j) = -\sin\theta\, i + \cos\theta\, j$$

$$[R_\theta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Changement de base

T application linéaire: $V \longrightarrow V$

$[T]_B$ matrice représentative par rapport à la base $B = (\vec{b_1}, \vec{b_2})$

$[T]_{B'}$ matrice représentative par rapport à la base $B' = (\vec{b'_1}, \vec{b'_2})$

but : établir la relation entre les matrices $[T]_B$ et $[T]_{B'}$

base B $\quad [\vec{v}]_B = [T]_B [\vec{u}]_B \qquad (1)$

base B' $\quad [\vec{v}]_{B'} = [T]_{B'} [\vec{u}]_{B'} \qquad (2)$

de B à B' $\quad = {}_{B'}P_B [\vec{v}]_B \qquad (3)$

(1) dans (3) $\quad = {}_{B'}P_B [T]_B [\vec{u}]_B \qquad (4)$

de B' à B $\quad [\vec{u}]_B = {}_BP_{B'} [\vec{u}]_{B'} \qquad (5)$

(5) dans (4) $\quad [\vec{v}]_{B'} = {}_{B'}P_B [T]_B \, {}_BP_{B'} [\vec{u}]_{B'} \qquad (6)$

comparaison de (2) et (6) $\quad [T]_{B'} = {}_{B'}P_B [T]_B \, {}_BP_{B'}$

Les matrices ${}_{B'}P_B$ et ${}_{B}P_{B'}$ sont les inverses l'une de l'autre

$$[T]_{B'} = {}_{B'}P_B \, [T]_B \; {}_{B}P_{B'} \qquad (*)$$

$${}_{B}P_{B'} [T]_{B'} = \underbrace{{}_{B}P_{B'} \; {}_{B'}P_B}_{\text{matrice identité}} [T]_B \; {}_{B}P_{B'} = [T]_B \; {}_{B}P_{B'}$$

$$[T]_B = {}_{B}P_{B'} \, [T]_{B'} \; {}_{B'}P_B = ({}_{B'}P_B)^{-1} [T]_{B'} \; {}_{B'}P_B \qquad (**)$$

Il s'agit de la même transformation T exprimée dans 2 bases différentes

Les matrices associées ont des propriétés de similitudes:

concept de matrices semblables sera définit plus loin

utilité de l'équation (*) ?

Exemple projection d'un point sur la droite d_1 parallèlement à la droite d_2

d_1 et d_2 passent par l'origine

d_1 : angle de $\pi/4$ (45°) avec l'axe X

d_2 : angle de $\pi/3$ (60°) avec l'axe X

Question

Déterminer la matrice $[T]_B$ associée à la transformation dans la base usuelle $B = (i, j)$

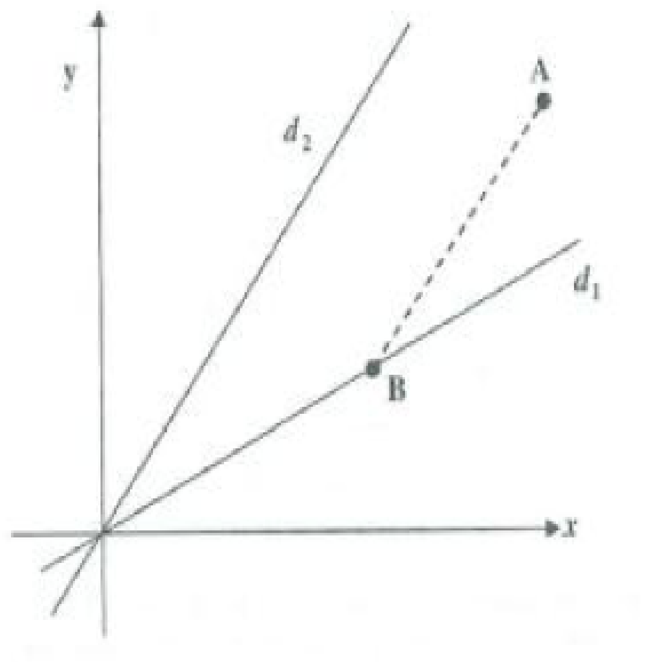


Figure 9 : Projection sur d_1 parallèlement à d_2.

base usuelle $B = (i, j)$

$\vec{b_1} = i + j$: vecteur directeur de d_1

$\vec{b_2} = i + \sqrt{3}\, j$: vecteur directeur de d_2

$\vec{b_1}$ et $\vec{b_2}$ non parallèles
indépendants
forment une base B' de V^2

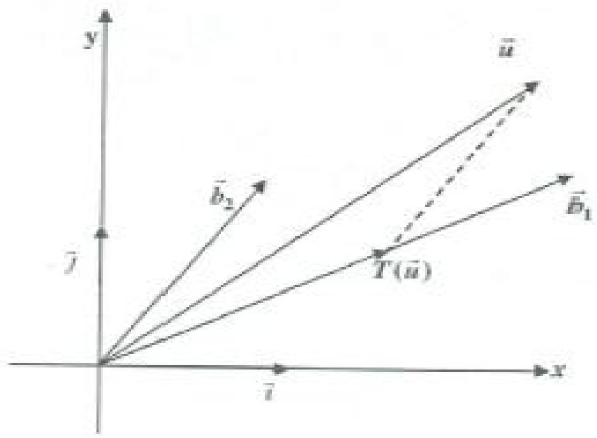
projection facile à exprimer dans la base B' formée de $\vec{b_1}$ et $\vec{b_2}$

$T(\vec{b_1}) = \vec{b_1}$

$T(\vec{b_2}) = 0$

$$[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple



Figure

à faire : - déterminer les matrices de transition entre B et B'

$_{B}P_{B'}$ et $_{B'}P_{B}$

- appliquer la formule

$$[T]_B = {}_{B}P_{B'}\,[T]_{B'}\,{}_{B'}P_{B}$$

$\vec{b}_1 = i + j$ $\quad\quad$ $\vec{b}_2 = i + \sqrt{3}\, j$

$$_{B}P_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$_{B'}P_{B} = ({}_{B}P_{B'})^{-1} = (1 / (\sqrt{3} - 1)) \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple

$$[T]_B = {}_BP_{B'}\ [T]_{B'}\ {}_{B'}P_B = ({}_{B'}P_B)^{-1}\ [T]_{B'}\ {}_{B'}P_B \quad (*)$$

$$= (1/(\sqrt{3}-1)) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (1/(\sqrt{3}-1)) \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{u}) = T(x\vec{i} + y\vec{j}) = (1/(\sqrt{3}-1))(\sqrt{3}x - y)\vec{i} + (1/(\sqrt{3}x-1))(\sqrt{3}x - y)\vec{j} \quad (**)$$

$$= x'\vec{i} + y'\vec{j}$$

$$x' = (\sqrt{3}x - y)/(\sqrt{3}-1) \quad \text{et} \quad y' = (\sqrt{3}x - y)/(\sqrt{3}-1)$$

Définition 3.3 Deux matrices A et A' sont des **matrices semblables** lorsqu'il existe une matrice inversible P telle que

$$A' = P^{-1} A P$$

voir t. 17

remarque : A et A' représente la même application mais dans des bases différentes

si A' et A sont semblables alors (1) (2) (3) sont satisfaites

$$\begin{aligned}
rg(A') &= rg(A) && (1)\\
dét(A') &= dét(P^{-1}AP) &&\\
&= dét(P^{-1})dét(A)dét(P) &&\\
&= (dét(P))^{-1}dét(A)dét(P) &&\\
&= dét(A) && (2)\\
tr(A') &= tr(P^{-1}AP) &&\\
&= tr(APP^{-1}) &&\\
&= tr(A). && (3)
\end{aligned}$$

rappel

$tr(A) = \sum a_{i\,i}$

mais si (1) (2) (3) sont satisfaites alors A et A' **ne sont pas nécessairement** semblables

Exercice: trouver un exemple

création de nouvelles applications linéaires par les opérations

- produit par un scalaire
- addition
- composition

lien avec les opérations analogues sur les matrices

PRODUIT par un SCALAIRE

Si T est une application linéaire alors $P = \lambda T$ est aussi une application linéaire et est définie par

$$P(\vec{u}) = (\lambda T)(\vec{u}) = \lambda T(\vec{u})$$

pour tout vecteur $\vec{u}$ de V.

Si $[T]_B$ est la matrice représentative de T par rapport à la base B, alors la matrice représentative de P par rapport à cette base est

$$[P]_B = \lambda[T]_B.$$

ADDITION

ite !

L'addition de deux applications linéaires T_1 et T_2 est une application linéaire $S = T_1 + T_2$ et est définie par

$$S(\vec{u}) = (T_1 + T_2)(\vec{u}) = T_1(\vec{u}) + T_2(\vec{u})$$

pour tout vecteur $\vec{u}$ de V.

Comment obtenir la matrice représentative de S en fonction des matrices représentatives de T_1 et T_2?

Soit l'application linéaire $S = T_1 + T_2$, alors sa matrice représentative par rapport à la base B est donnée par

$$[S]_B = [T_1]_B + [T_2]_B.$$

site !

Exemple

trouver l'image $S(\vec{u})$ du vecteur $\vec{u}$ où S est
S : application définie par la symétrie orthogonale par rapport à un vecteur donné $\vec{a}$

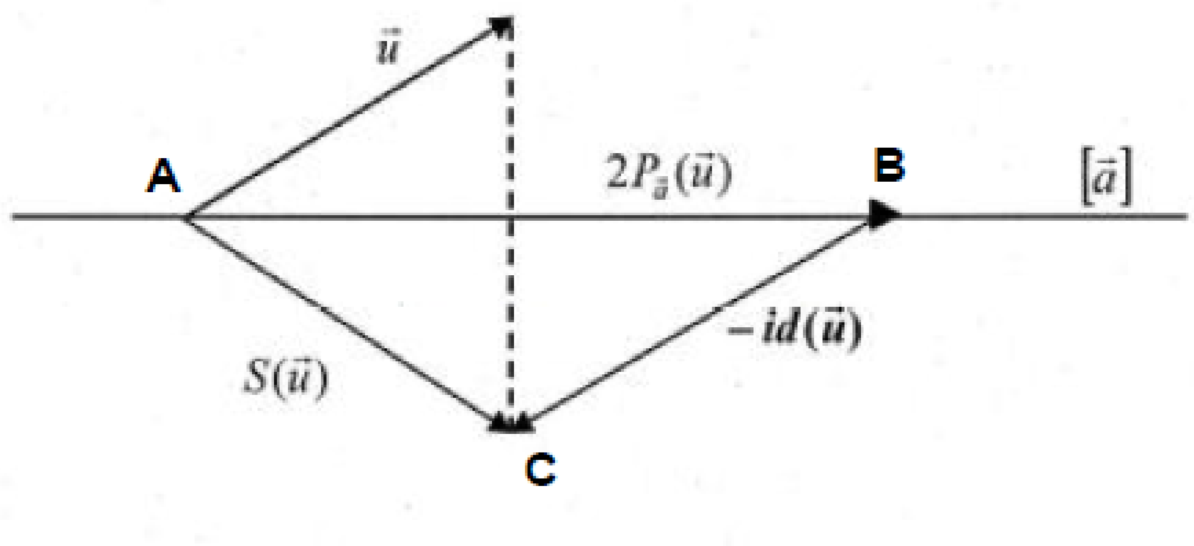


Figure 11 : Symétrie orthogonale par rapport à $\vec{a}$

SOLUTION triangle ABC permet d'écrire

$$S(\vec{u}) = 2P_{\vec{a}}(\vec{u}) - id(\vec{u})$$

Exemple

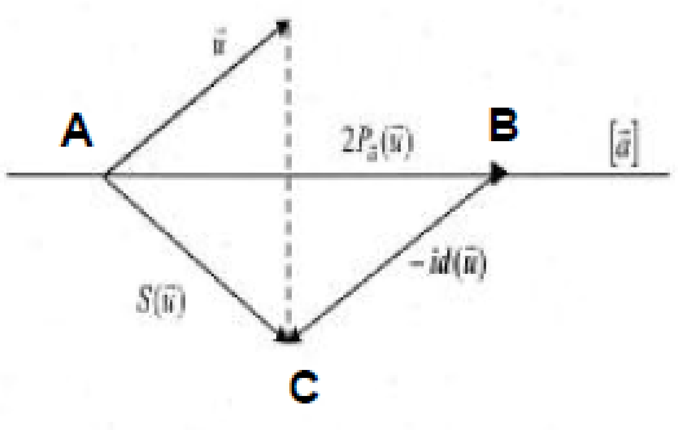


Figure 11 : Symétrie orthogonale par rapport à $\vec{a}$

base usuelle $B = (i, j)$

$$\vec{a} = a_1\, i + a_2\, j$$

la projection orthogonale $[P_{\vec{a}}]_B$

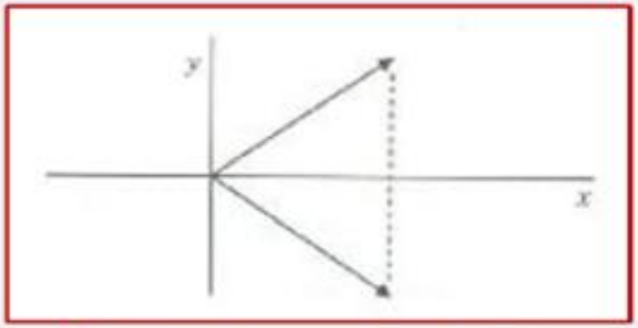
est une transformation linéaire ayant pour matrice représentative

$$[P_{\vec{a}}]_B = (1/(a_1^2 + a_2^2))\begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 \\ a_2a_1 & a_2^2 \end{bmatrix}$$

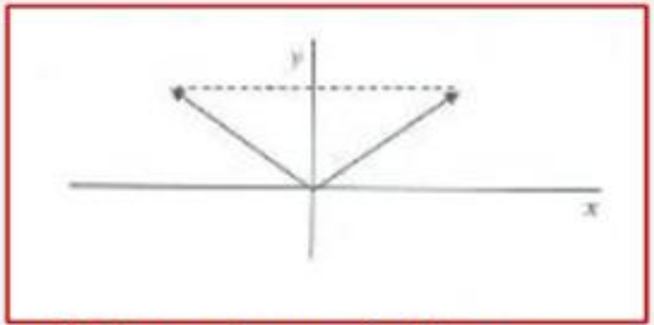
$$[S]_B = 2\,[P_{\vec{a}}]_B - [id] = (1/(a_1^2 + a_2^2))\begin{bmatrix} a_1^2 - a_2^2 & 2a_1a_2 \\ 2a_2a_1 & a_2^2 - a_1^2 \end{bmatrix}$$

choix particuliers de $\vec{a}$ base usuelle = (i, j)

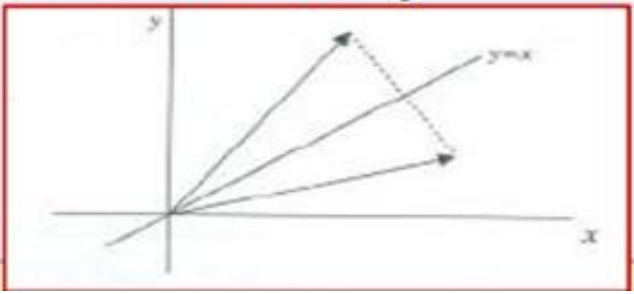
Symétrie autour de l'axe X (horizontal) : $\vec{a} = \vec{i}$ matrice $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$



Symétrie autour de l'axe Y (vertical) : $\vec{a} = \vec{j}$ matrice $S = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



Symétrie autour de l'axe $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ matrice $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$



Exemple 3.17 p.107

Déterminer la matrice représentative

projection orthogonale sur le plan vectoriel $[\vec{a}, \vec{b}]$

dans la base $C = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$

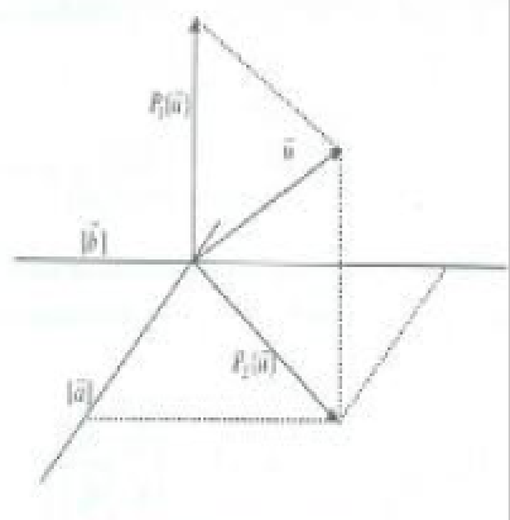


Figure 12 : Projection orthogonale sur $[\vec{a}, \vec{b}]$

P_1 projection orthogonale sur le vecteur $[\vec{a} \times \vec{b}]$

P_2 projection orthogonale sur le plan vectoriel $[\vec{a}, \vec{b}]$

$$P_2 = id - P_1 \qquad \text{(voir dessin)}$$

$$P_2(\vec{a}) = id(\vec{a}) - P_1(\vec{a}) = \vec{a} = 1\,\vec{a} + 0\,\vec{b} + 0\,(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$P_2(\vec{b}) = id(\vec{b}) - P_1(\vec{b}) = \vec{b} = 0\,\vec{a} + 1\,\vec{b} + 0\,(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$P_2(\vec{a} \times \vec{b}) = id(\vec{a} \times \vec{b}) - P_1(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0} = 0\,\vec{a} + 0\,\vec{b} + 0\,(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$[P_2]_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.5 Opérations sur les applications linéaires

COMPOSITION de 2 APPLICATIONS LINÉAIRES T_1 et T_2

La composition de deux applications linéaires T_1 et T_2 de V, notée $T_1 \circ T_2$, est définie par

$$(T_1 \circ T_2)(\vec{u}) = T_1(T_2(\vec{u})).$$

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[rr, "T_1"] \arrow[dr] & & V_2 \arrow[rr, "T_2"] & & V_3 \\
& T_2 \circ T_1 \arrow[urrr] & & &
\end{tikzcd}$$

V_1, V_2, V_3 peuvent être V^2 ou V^3

$T_1 \circ T_2$ est une nouvelle application : elle est aussi <u>linéaire</u>

3.5 Opérations sur les applications linéaires

COMPOSITION de 2 APPLICATIONS LINÉAIRES T_1 et T_2

$$
\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "T_1"] \arrow[rr, bend right, "T_2 \circ T_1"'] & V_2 \arrow[r, "T_2"] & V_3
\end{tikzcd}
$$

$V_1 \quad V_2 \quad V_3$

=

V^2 ou V^3

Quelle est la matrice représentative de $T_2 \circ T_1$?

<u>cas de V^2</u> base B $= (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ résultat (démonstration p. 108)

Soit l'application linéaire $T_1 \circ T_2$, alors sa matrice représentative par rapport à la base B est donnée par le produit des matrices représentatives de T_1 et T_2 dans cette base, soit

$$[T_1 \circ T_2]_B = [T_1]_B [T_2]_B .$$

résultat aussi valable dans V^3

3.5 Opérations sur les applications linéaires

Exemple 3.18 p. 110

T_1 = C (cisaillement) de rapport k = 2 dans la direction axe X

suivi de T_2 = S (symétrie) orthogonale par rapport à y = x

T_3 = S o C = ? est-ce que S o C = C o S?

SOLUTION base usuelle (i, j) voir ex 3.10 t. 9 + ex 3.16 t. 23

$$[T_3]_B = [S]_B\,[C]_B = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$[T_4]_B = [C]_B\,[S]_B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{S \circ C \neq C \circ S}$$

Définition le noyau d'une application linéaire $T : V \longrightarrow V$

est noté Ker(T) est l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ tel que $T(\vec{u}) = \vec{0}$

analogie: c'est comme trouver les zéros d'une fonction polynomiale

remarques

- Ker(T) n'est jamais vide car $\vec{0} \in \mathrm{Ker}\,(T)$ puisque $T(\vec{0}) = \vec{0}$
- Ker(T) est un sous-espace vectoriel de V : il contient $\vec{0}$

Définition *L'image d'une application linéaire* $T:V \to V$ *, notée* $\mathrm{Im}(T)$*, est l'ensemble des vecteurs* $\vec{v}$ *tels qu'il existe au moins un vecteur* $\vec{u}$ *de* V *pour lequel* $\vec{v} = T(\vec{u})$*, c'est-à-dire*

$$\mathrm{Im}(T) = \left\{ \vec{v} \in V \,\middle|\, \exists \vec{u} \in V, \vec{v} = T(\vec{u}) \right\}.$$

Im(T) est un sous-espace vectoriel de V : il contient $\vec{0}$

Définition *Le* **rang** *d'une application linéaire* $T:V \to V$ *, noté* $rg(T)$*, est égal à la dimension du sous-espace vectoriel* $\mathrm{Im}(T)$ *:*

$$rg(T) = dim\,\mathrm{Im}(T).$$

site !

Théorème *Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Pour toute application linéaire $T : V \to V$, on a*

$$rg(T) + dim(Ker(T)) = dim V .$$

dim (Im(T)) + dim (Ker(T)) = dim (V)

Comment trouver le noyau et l'image pour une application quelconque ?

noyau : résoudre $T(\vec{u}) = \vec{0}$

Image : résoudre $T(\vec{u}) = \vec{v}$ il y a 2 inconnues

soit $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n)$ base de V

$$\vec{u} = u_1\vec{b}_1 + u_2\vec{b}_2 + \ldots + u_n\vec{b}_n$$

$$T(\vec{u}) = u_1 T(\vec{b}_1) + u_2 T(\vec{b}_2) + \ldots + u_n T(\vec{b}_n)$$

$$Im(T) = [\, T(\vec{b}_1), T(\vec{b}_2), \ldots T(\vec{b}_n) \,]$$

Rang = nombre de colonnes linéairement indépendantes de $[\,T\,]_B$

ale

de Casablanca

Exemple $T : V^3 \longrightarrow V^3$ base usuelle B = (i, j, k)

matrice associée $[T]_B = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

Déterminer Ker(T), rang(T) , donner une base de Im(T)

SOLUTION

noyau de T $\vec{u} = xi + yj + zk$ $T(\vec{u}) = \vec{0}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$x + 4y + 2z = 0 \quad (1)$$
$$x + 3y + 2z = 0 \quad (2)$$
$$x + 2y + 2z = 0 \quad (3)$$

(3)-(2) $y = 0$ et (1) devient $x = -2z$ $\vec{u} = z(-2\vec{i} + \vec{k})$ $z \in \bullet$

Ker(T) = [-2i + k] rang(T) = 3 – dim(Ker(T) = 3 - 1 = 2

base de Im(T) = (col_1, col_2) = (i + j + k, 4i +3j +2k) car col_3 = 2*col_1

Applications régulières et inverses

application linéaire $T : V \longrightarrow V$ V espace vectoriel dimension finie

T est de **rang maximal** si rang(T) = dim(V)

Exemples t. 31 identité / homothétie / symétrie orthogonale

Critère à vérifier : T est de rang maximal si les colonnes de $[T]_B$ sont linéairement indépendantes

c-a-d rang(T) = dim(V) $\Longleftrightarrow$ $\det [T]_B \neq 0$

par théorème 15 / 16 $\mathrm{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$ et $\dim \mathrm{Ker}(T) = 0$

Définition T est une application linéaire **régulière** si $\mathrm{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$

Si $\dim \mathrm{Ker}(T) \geq 1$ alors T est une application **singulière**

Théorème Si T est une application linéaire régulière alors T est un **bijection**

il existe une application linéaire inverse T^{-1}

$$\vec{u} = T(\vec{v}) \Longleftrightarrow \vec{v} = T^{-1}(\vec{u})$$

Application des propriétés d'une transformation régulière

- conservation des propriétés géométriques
- résolution des systèmes d'équations linéaires

Théorème $T : V^3 \longrightarrow V^3$ application linéaire régulière

alors

1. l'image d'une droite par T est une droite
2. l'image d'un plan par T est un plan

Exemple T application régulière dans la base usuelle B = (i, j)

matrice $[T] = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ et $[T]^{-1} = \begin{vmatrix} -1/2 & 3/2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

déterminer l'image de la droite D : $y = 2x + 5$ (1)

$(x, y) = (x, 2x + 5)$ point sur la droite D $(x, y) = T^{-1}(x', y')$

par T^{-1} $x = (-1/2)x' + (3/2)y'$ (2) et $y = x' - 2y'$ (3)

(2) dans (1) $y = 2x+5 = 2((-1/2)x' + (3/2)y') + 5 = - x' + 3y' + 5 = x' - 2y'$

$y' = (2/5)\, x' - 1$ image de la droite D est une droite D'

Exemple T transformation linéaire régulière B = (i, j)

$$[T] = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Image du carré (1,1) (1,2) (2,2) (2,1) = ?

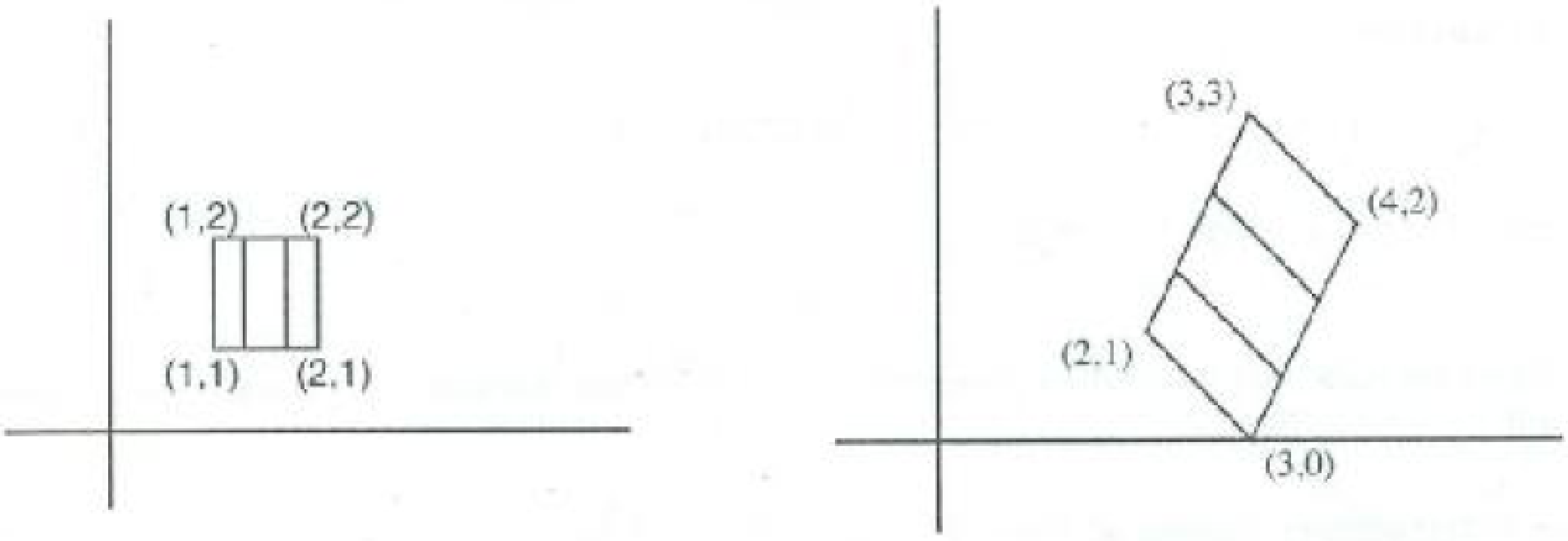


Image du carré est un parallélogramme

Résolution de systèmes d'équations linéaires

système d'équations linéaires

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

Écriture matricielle $AX = B$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (x, y, z)^t \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = (b_1, b_2, b_3)^t$$

Résolution de systèmes d'équations linéaires

système d'équations linéaires

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

Écriture matricielle $AX = B$

A matrice représentative d'une application linéaire T dans une base C

Écriture vectorielle $T(\vec{x}) = \vec{b}$

$\vec{x} = (x, y, z)^t$ $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)^t$

liens entre A et les solutions du système?

Résolution de systèmes d'équations linéaires

cas 1 : $AX = 0$ système homogène

cas 2 : $AX = B$ $B \neq 0$ système non homogène

Cas 1 : $AX = 0$

on cherche le noyau de T Ker(T)

si T est **régulière** : $Ker(T) = \{ \vec{0} \}$ donc $X = 0$

si T est **singulière** : Ker(T) est un sous-espace de dim ≥ 1

et il y a une **infinité de solutions**

Exemple

$$5x - y + 4z = 0 \quad (1)$$

$$x - y + 2z = 0 \quad (2)$$

$$x + y - z = 0 \quad (3)$$

$$A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 5(-1) - (-1)(-3) + 4(2) = 0$$

donc il y a une infinité de solutions

$$(2) - (3) : \quad -2y + 3z = 0 \qquad (4)$$

$$y = (3/2)\, z \qquad (5)$$

$$(5) \text{ dans } (2) : \quad x - (3/2)z + 2z = 0 \qquad (6)$$

$$x = -(1/2)\, z \qquad (7)$$

$$X = (\,-(1/2)z,\ (3/2)z,\ z)^t = (z/2)\,(\,-1, 3, 2)^t \qquad z\ \varepsilon\ \bullet$$

$(\,-1, 3, 2)^t$: générateur du noyau

Résolution de systèmes d'équations linéaires

Cas 2 : $AX = B$ $B \neq 0$ système non homogène

Si $dét(A) \neq 0$, il existe une solution unique $X = A^{-1}B$.

Si $dét(A) = 0$, alors

- Si B n'appartient pas au sous-espace engendré par les colonnes de A, le système ne possède aucune solution (système inconsistant).
- Si B appartient au sous-espace engendré par les colonnes de A, il existe une infinité de solutions (système redondant). La solution générale est donc obtenue par la somme d'une solution particulière du système $AX = B$ et de la solution générale du système homogène $AX = 0$.

Résolution de systèmes d'équations linéaires

Exemple 3.27 cas : système non homogène
A régulière
solution unique

Exemple 3.28 cas : système non homogène
A singulière
pas de solution (système inconsistant)

Exemple 3.29 cas : système non homogène
A singulière
infinité de solutions (système redondant)

solution = solution particulière du système non homogène

\+ solution générale du système homogène

Résolution de systèmes d'équations linéaires

ite !

Exemple 3.27 cas : système non homogène
A régulière solution unique

$$x + y + z = 4 \quad (a)$$

$$2x + y + 4z = 11 \quad (b)$$

$$4x - y + z = 5 \quad (c)$$

(b) + (-2)*(a) : $- y + 2z = 3$ (d)

(c) + (-4)*(a) : $- 5y - 3z = -11$ (e)

(e) + (-5)*(d) : $-13 z = -26$ (f)

donc $z = 2 \quad y = 1 \quad x = 1$

Résolution de systèmes d'équations linéaires

e !

Exemple 3.28 cas : système non homogène
A singulière
pas de solution (système incohérent)

$$x + y + z = 4 \quad (a)$$

$$x - 2y - z = -2 \quad (b)$$

$$3x - 3y - z = 4 \quad (c)$$

(b) + (-1)(a) : $-3y - 2z = -6 \quad (d)$

(c) + (-3)(a) : $-6y - 4z = 8 \quad (e)$

(e) + (2)(d) : $0 = 4$

système incohérent : pas de solution car $\det(A) = 0$

Résolution de systèmes d'équations linéaires

Exemple 3.29 cas : système non homogène

A singulière infinité de solutions

solution = solution particulière du système non homogène
+ solution générale du système homogène

système

$$\begin{aligned} 2x - 6y - 4z &= 4 \quad (a) \\ 3x - 9y - 6z &= 6 \quad (b) \\ -x + 3y + 2z &= -2 \quad (c) \end{aligned}$$

(a) + 2(c) = 0 (c) = (-1/2) (a) (c) est redondante

3(a) - 2(b) = 0 (b) = (3/2) (a) (b) est redondante

le système (a)-(b)- (c) est en réalité formé de (a) seulement

(a)/2 : $x - 3y - 2z = 2$ c – a - d $x = 3y + 2z + 2$ (d)

système (a)-(b)-(c) possède une infinité de solution

$$(x, y, z)^t = (3y + 2z + 2, y, z)^t = (2, 0, 0)^t + y(3, 1, 0)^t + z(2, 0, 1)^t$$

$(2, 0, 0)^t$: solution particulière du système non homogène

$y(3, 1, 0)^t + z(2, 0, 1)^t$: solution générale du système homogène