Série 3 : applications, moteur Diesel et moteur à essence

Application 1 :

Les données :

BC et DE : transformations isentropiques ;
CD : transformation isobare ;
EB : transformation isochore ;

$\varepsilon = \frac{V_B}{V_C}$ et $\sum = \frac{V_D}{V_C}$.

1/

- L'Expression de la température T_C en fonction de T_B :

La transformation B -> C est une transformation adiabatique réversible.
D'après la 2ieme loi de Laplace : $TV^{\gamma-1} = cte$

$$\Leftrightarrow T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$$

$$\Leftrightarrow T_C = T_B \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow T_C = T_B \varepsilon^{\gamma-1}$$

- L'expression de la température T_D en fonction de T_B :

La transformation C -> D est une transformation isobare, donc :

$$P_C = P_D \quad \Leftrightarrow \quad \frac{nRT_C}{V_C} = \frac{nRT_D}{V_D} \quad \Rightarrow \quad T_D = T_C \frac{V_D}{V_C} \quad \Rightarrow \quad T_D = T_C \sum \qquad (A)$$

En utilisant l'expression de T_C dans (A), on obtient :

$$T_D = T_C \sum = T_B \varepsilon^{\gamma-1} \sum$$

- L'expression de la température T_E en fonction de T_B :

La transformation D -> E est une transformation adiabatique réversible.
D'après la 2ieme loi de Laplace : $TV^{\gamma-1} = cte$

$$\Leftrightarrow T_D V_D^{\gamma-1} = T_E V_E^{\gamma-1}$$

$$\Leftrightarrow T_E = T_D \left(\frac{V_D}{V_E}\right)^{\gamma-1} \qquad (B)$$

La transformation E --> B est une transformation isochore, donc $V_E = V_B$

D'après les données, on a : $\sum = \frac{V_D}{V_C} \quad \Rightarrow V_D = \sum V_C$

On remplace les deux dernières expressions en (B) :

$$T_E = T_D \left(\frac{V_D}{V_E}\right)^{\gamma-1} = T_D \left(\frac{\sum V_C}{V_B}\right)^{\gamma-1} \quad , avec \ \frac{V_C}{V_B} = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow T_E = T_D \left(\frac{\sum}{\varepsilon}\right)^{\gamma-1}$$

En remplaçant l'expression de T_D dans T_E ce qui donne :

$$T_E = T_D \left(\frac{\Sigma}{\varepsilon}\right)^{\gamma-1} = T_B \varepsilon^{\gamma-1} \Sigma \left(\frac{\Sigma}{\varepsilon}\right)^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow T_E = T_B \Sigma^{\gamma}$$

2/

- L'expression du travail W_{BC} :

La 1ère loi de la thermodynamique :

$$\Delta U_{BC} = W_{BC} + Q_{BC},\, Q_{BC} = 0 \;\; \textit{car la transformation adiabatique}$$

$$D'ou : W_{BC} = C_V\left(T_C - T_B\right) = C_V\left(T_B \varepsilon^{\gamma-1} - T_B\right)$$

$$\Rightarrow W_{BC} = C_V T_B\left(\varepsilon^{\gamma-1} - 1\right)$$

- L'expression du travail W_{CD} :

Par définition : $\delta w = -P_{ext} dV$

$$\Rightarrow W_{CD} = -\int_C^D P_C dV = -P_C\left(V_D - V_C\right)$$

$$\Rightarrow W_{CD} = -\frac{nRT_C}{V_C}\left(V_D - V_C\right)$$

$$\Rightarrow W_{CD} = -nRT_C\left(\frac{V_D - V_C}{V_C}\right) = -nRT_C\left(\frac{V_D}{V_C} - 1\right)$$

$$\Rightarrow W_{CD} = -nRT_B \varepsilon^{\gamma-1}\left(\Sigma - 1\right)$$

- L'expression du travail W_{DE} :

La 1ère loi de la thermodynamique :

$$\Delta U_{DE} = W_{DE} + Q_{DE}, \qquad Q_{DE} = 0 \;\; \textit{car la transformation adiabatique}$$

$$D'ou : W_{DE} = C_V\left(T_E - T_D\right) = C_V\left(T_B \Sigma^{\gamma} - T_B \varepsilon^{\gamma-1} \Sigma\right)$$

$$\Rightarrow W_{DE} = C_V T_B\left(\Sigma^{\gamma} - \varepsilon^{\gamma-1} \Sigma\right)$$

- L'expression du travail total :

$$W_{total} = W_{BC} + W_{CD} + W_{DE} + W_{EB}$$

$$\Rightarrow W_{total} = C_V T_B\left(\varepsilon^{\gamma-1} - 1\right) - nRT_B \varepsilon^{\gamma-1}\left(\Sigma - 1\right) + C_V T_B\left(\Sigma^{\gamma} - \varepsilon^{\gamma-1} \Sigma\right) + 0$$

$$\Rightarrow W_{total} = C_V T_B\left(\varepsilon^{\gamma-1} - 1\right) - nRT_B \varepsilon^{\gamma-1}\left(\Sigma - 1\right) + C_V T_B\left(\Sigma^{\gamma} - \varepsilon^{\gamma-1} \Sigma\right)$$

3/ L'expression de Q_{CD} :

La 1ère loi de la thermodynamique :

$$\Delta U_{CD} = W_{CD} + Q_{CD} \quad \Leftrightarrow Q_{CD} = \Delta U_{CD} - W_{CD}$$

$$\Rightarrow Q_{CD} = C_V\left(T_D - T_C\right) + nRT_B \varepsilon^{\gamma-1}\left(\Sigma - 1\right)$$

4/ Le rendement du cycle :

$$\eta = \frac{-W_{tot}}{Q_C} = -\frac{\textit{Travail toral}}{\textit{Chaleur de la source chaude}}$$

La chaleur de la source chaude est la chaleur échangée lors de la transformation C ->D.
D'où :

$$\eta = -\frac{Wtot}{Q_{CD}}$$

Application 2 :

1/ Déterminons les températures en C et B en fonction de T_B, δ et ε

D'après la 2ieme loi de Laplace : $TV^{\gamma-1} = cte$

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \quad \Leftrightarrow \quad T_C = T_B\left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1} \quad \Leftrightarrow T_C = T_B\varepsilon^{\gamma-1}$$

$$D'après\ les\ données : T_D = \delta T_C = \delta T_B \varepsilon^{\gamma-1}$$

2/ La transformation D -> E est une transformation adiabatique réversible.
la 2ieme loi de Laplace : $TV^{\gamma-1} = cte$

$$\Leftrightarrow T_D V_D^{\gamma-1} = T_E V_E^{\gamma-1}$$

$$\Leftrightarrow T_E = T_D\left(\frac{V_D}{V_E}\right)^{\gamma-1}$$

$$\Leftrightarrow T_E = T_D\left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\gamma-1}$$

$$\Leftrightarrow T_E = T_D \varepsilon^{1-\gamma}$$

$$\Leftrightarrow T_E = \delta T_B \varepsilon^{1-\gamma}\varepsilon^{\gamma-1}$$

$$\Leftrightarrow T_E = \delta T_B$$

3/ Pour que les transformations B -> C et D ->E soient considérées comme des adiabatiques il faut qu'elles soient très rapides pour limiter le flux de chaleur avec l'extérieur.

- Le moteur fait 4000 tr/min
- Le vilebrequin fait 2 tr/cycle

Donc on a 2000 cycle/min soit 3.10^{-2}s. D'où les transformations sont rapides et par suite elles ne peuvent pas être réversible.
4/ B -> C : adiabatique réversible
D'après la 1ère loi de thermodynamique

$$\Delta U_{BC} = W_{BC} + Q_{BC}$$

$$D'ou : W_{BC} = C_V(T_C - T_B) = C_V T_B(\varepsilon^{\gamma-1} - 1)$$

$W_{CD} = 0$ Car C -> D est isochore

$W_{EB} = 0$ Car E -> B est isochore

La transformation D -> E est adiabatique réversible.

$$W_{DE} = \Delta U_{DE} = C_V(T_E - T_D) = C_V T_B \delta(1 - \varepsilon^{\gamma-1})$$

5/

$$W_{total} = W_{BC} + W_{CD} + W_{DE} + W_{EB}$$

$$\Rightarrow W_{total} = C_V T_B(\varepsilon^{\gamma-1} - 1) + 0 + C_V T_B \delta(1 - \varepsilon^{\gamma-1}) + 0$$

$$\Rightarrow W_{total} = C_V T_B(\varepsilon^{\gamma-1} - 1)(1 - \delta)$$

6/ Le rendement du cycle :

Montrons que le rendement du cycle s'écrit sous forme : $\eta = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}}$

Pour les machines thermiques

$$\eta = \frac{-W_{tot}}{Q_C} = -\frac{Travail\ toral}{Chaleur\ de\ la\ source\ chaude}$$

La chaleur de la source chaude est la chaleur échangée lors de la transformation C ->D.
D'où :

$$\eta = \frac{-C_V T_B\left(\varepsilon^{\gamma-1} - 1\right)(1-\delta)}{C_V\left(T_D - T_C\right)}$$

$$avec: \quad T_D = \delta T_B \varepsilon^{\gamma-1}$$

$$T_C = T_B \varepsilon^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{-C_V T_B\left(\varepsilon^{\gamma-1} - 1\right)(1-\delta)}{C_V T_B \varepsilon^{\gamma-1}(\delta - 1)}$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{\left(\varepsilon^{\gamma-1} - 1\right)}{\varepsilon^{\gamma-1}}$$

$$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}}$$

7/

```
> restart;
> with(plots):
> eta:=1-(1/(epsilon^(gamma-1)));
```

$$\eta := 1 - \frac{1}{\varepsilon^{(\gamma-1)}}$$

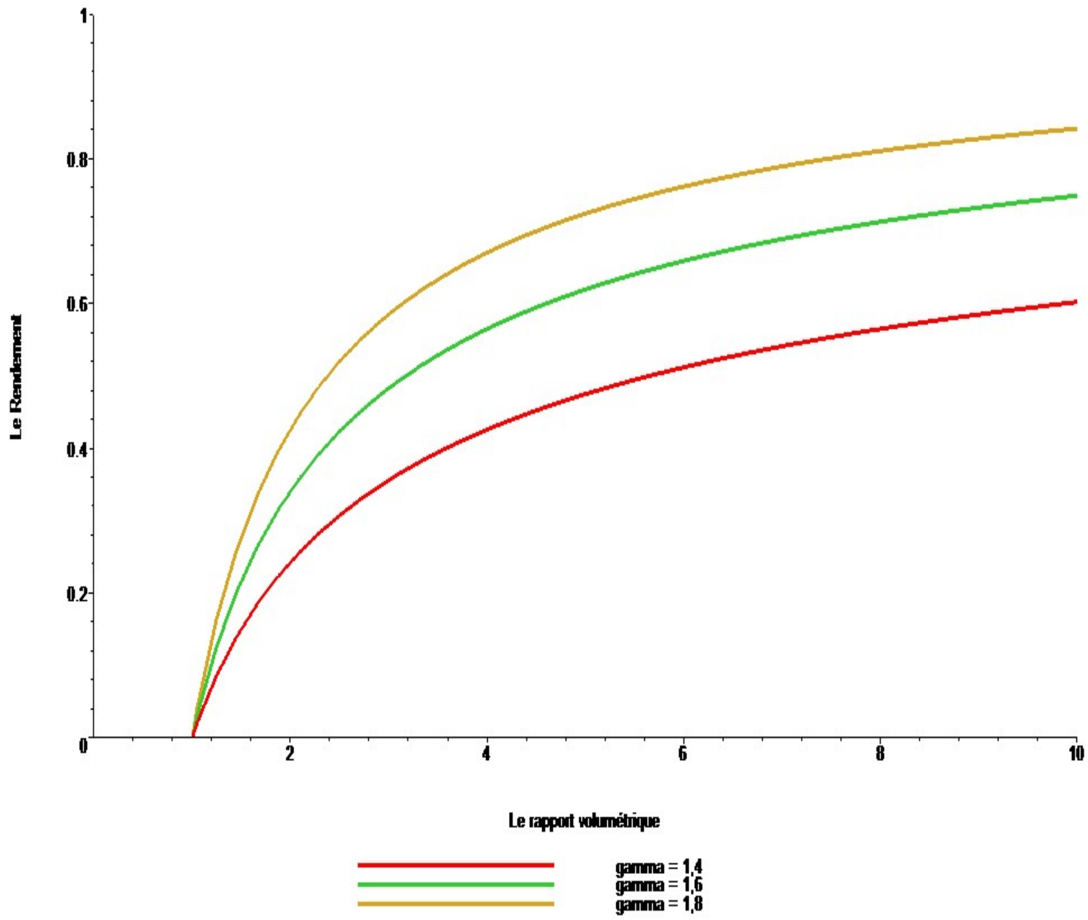
```
> eta[1]:=1-(1/(epsilon^(1.4-1)));
eta[2]:=1-(1/(epsilon^(1.6-1)));
eta[3]:=1-(1/(epsilon^(1.8-1)));
```

$$\eta_1 := 1 - \frac{1}{\varepsilon^{0.4}}$$

$$\eta_2 := 1 - \frac{1}{\varepsilon^{0.6}}$$

$$\eta_3 := 1 - \frac{1}{\varepsilon^{0.8}}$$

```
> plot([eta[1],eta[2],eta[3]],epsilon=0..10,0..1, labels=["Le
rapport volumétrique","Le Rendement"],
labeldirections=[horizontal,vertical],
thickness=3,legend=["gamma = 1,4","gamma = 1,6","gamma =
1,8"]);
```


Le Rendement
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
2
4
6
8
10
Le rapport volumétrique
gamma = 1,4
gamma = 1,6
gamma = 1,8