Développements limités

Corrections d'Arnaud Bodin.

1 Calculs

Exercice 1

Donner le développement limité en 0 des fonctions :

1. $\cos x \cdot \exp x$ à l'ordre 3
2. $(\ln(1+x))^2$ à l'ordre 4
3. $\dfrac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}$ à l'ordre 6
4. $\exp\big(\sin(x)\big)$ à l'ordre 4
5. $\sin^6(x)$ à l'ordre 9
6. $\ln\big(\cos(x)\big)$ à l'ordre 6
7. $\dfrac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4
8. $\tan x$ à l'ordre 5 (ou 7 pour les plus courageux)
9. $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$ à l'ordre 3
10. $\arcsin\big(\ln(1+x^2)\big)$ à l'ordre 6

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006888]

Exercice 2

1. Développement limité en 1 à l'ordre 3 de $f(x) = \sqrt{x}$.
2. Développement limité en 1 à l'ordre 3 de $g(x) = e^{\sqrt{x}}$.
3. Développement limité à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{3}$ de $h(x) = \ln(\sin x)$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001243]

Exercice 3

Donner un développement limité à l'ordre 2 de $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$ en 0. En déduire un développement à l'ordre 2 en $+\infty$. Calculer un développement à l'ordre 1 en $-\infty$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001244]

2 Applications

Exercice 4

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001247]

Exercice 5

Étudier la position du graphe de l'application $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ par rapport à sa tangente en 0 et 1.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001249]

Exercice 6

Déterminer :

1. (a) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x+2}+x$

   (b) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x+2}+x$

2. $\lim_{x\to 0^+} (\arctan x)^{\frac{1}{x^2}}$

3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-1-\sin x}{1-\cos x}$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001265]

3 Formules de Taylor

Exercice 7

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^6}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001267]

Exercice 8

Soit a un nombre réel et $f :]a,+\infty[\to \mathbb{R}$ une application de classe C^2. On suppose f et f'' bornées ; on pose $M_0 = \sup_{x>a} |f(x)|$ et $M_2 = \sup_{x>a} |f''(x)|$.

1. En appliquant une formule de Taylor reliant $f(x)$ et $f(x+h)$, montrer que, pour tout $x > a$ et tout $h > 0$, on a : $|f'(x)| \leqslant \frac{h}{2}M_2 + \frac{2}{h}M_0$.
2. En déduire que f' est bornée sur $]a,+\infty[$.
3. Établir le résultat suivant : soit $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 à dérivée seconde bornée et telle que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Alors $\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001268]

4 DL implicite

Exercice 9 $\tan(x) = x$

1. Montrer que l'équation $\tan x = x$ possède une unique solution x_n dans $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ $(n \in \mathbb{N})$.
2. Quelle relation lie x_n et $\arctan(x_n)$?
3. Donner un DL de x_n en fonction de n à l'ordre 0 pour $n \to \infty$.
4. En reportant dans la relation trouvée en 2, obtenir un DL de x_n à l'ordre 2.

Correction ▼ Vidéo ■ [004037]

5 Equivalents

Exercice 10 Recherche d'équivalents

Donner des équivalents simples pour les fonctions suivantes :

1. $2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}$, en 0
2. $(\cos x)^{\sin x} - (\cos x)^{\tan x}$, en 0
3. $\arctan x + \arctan \frac{3}{x} - \frac{2\pi}{3}$, en $\sqrt{3}$
4. $\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2}$, en $+\infty$
5. $\operatorname{argch}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$, en 0

Correction ▼ Vidéo ■ [004044]

Exercice 11 Approximation de cos

Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$$

soit un $o(x^n)$ en 0 avec n maximal.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [004045]

Exercice 12

Calculer

$$\ell = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x.$$

Donner un équivalent de

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - \ell$$

lorsque $x \to +\infty$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [002657]

Indication pour l'exercice 1 ▲

1. $\cos x \cdot \exp x = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$
2. $(\ln(1+x))^2 = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4)$
3. $\frac{\operatorname{sh} x - x}{x^3} = \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}x^2 + \frac{1}{7!}x^4 + \frac{1}{9!}x^6 + o(x^6)$
4. $\exp\big(\sin(x)\big) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$
5. $\sin^6(x) = x^6 - x^8 + o(x^9)$
6. $\ln(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6)$
7. $\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$
8. $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7)$
9. $(1+x)^{\frac{1}{1+x}} = \exp\big(\frac{1}{1+x}\ln(1+x)\big) = 1 + x - x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$
10. $\arcsin\big(\ln(1+x^2)\big) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2} + o(x^6)$

Indication pour l'exercice 2 ▲

Pour la première question vous pouvez appliquer la formule de Taylor ou bien poser $h = x - 1$ et considérer un dl au voisinage de $h = 0$.

Indication pour l'exercice 3 ▲

En $x = 0$ c'est le quotient de deux dl. En $x = +\infty$, on pose $h = \frac{1}{x}$ et on calcule un dl en $h = 0$.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Il s'agit bien sûr de calculer d'abord des dl afin d'obtenir la limite. On trouve :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \frac{3}{2}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} = 0$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4} = \frac{1}{6}$

Indication pour l'exercice 5 ▲

Faire un dl en $x = 0$ à l'ordre 2 cela donne $f(0)$, $f'(0)$ et la position par rapport à la tangente donc tout ce qu'il faut pour répondre aux questions. Idem en $x = 1$.

Indication pour l'exercice 6 ▲

Il s'agit de faire un dl afin de trouver la limite.

1. (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x+2} + x = +\infty$

   (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x+2} + x = -\dfrac{3}{2}$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\arctan x)^{\frac{1}{x^2}} = 0$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+3x)^{\frac{1}{3}} - 1 - \sin x}{1 - \cos x} = -2$

Indication pour l'exercice 7 ▲

Calculer d'abord le dl puis utiliser une formule de Taylor.

Indication pour l'exercice 8 ▲

1. La formule à appliquer est celle de Taylor-Lagrange à l'ordre 2.
2. Étudier la fonction $\phi(h) = \frac{h}{2}M_2 + \frac{2}{h}M_0$ et trouver $\inf_{h>0} \phi(h)$.
3. Il faut choisir un $a > 0$ tel que $g(x)$ soit assez petit sur $]a, +\infty[$; puis appliquer les questions précédentes à g sur cet intervalle.

Indication pour l'exercice 11 ▲

Identifier les dl de $\cos x$ et $\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ en $x = 0$.

Indication pour l'exercice 12 ▲

Faites un développement faisant intervenir des x et des $\ln x$. Trouvez $\ell = 1$.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. $\cos x \cdot \exp x$ (à l'ordre 3).
   Le dl de $\cos x$ à l'ordre 3 est
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \varepsilon_1(x)x^3.$$
   Le dl de $\exp x$ à l'ordre 3 est
$$\exp x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3.$$
   Par convention toutes nos fonctions $\varepsilon_i(x)$ vérifierons $\varepsilon_i(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$.

   On multiplie ces deux expressions
$$\begin{aligned}\cos x \times \exp x &= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \varepsilon_1(x)x^3\right) \times \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right)\\ &= 1 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right) \quad \text{on développe la ligne du dessus}\\ &\quad - \frac{1}{2}x^2 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right)\\ &\quad + \varepsilon_1(x)x^3 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right)\end{aligned}$$

   On va développer chacun de ces produits, par exemple pour le deuxième produit :
$$-\frac{1}{2!}x^2 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}x^5 - \frac{1}{2}x^2 \cdot \varepsilon_2(x)x^3.$$
   Mais on cherche un dl à l'ordre 3 donc tout terme en x^4, x^5 ou plus se met dans $\varepsilon_3(x)x^3$, y compris $x^2 \cdot \varepsilon_2(x)x^3$ qui est un bien de la forme $\varepsilon(x)x^3$. Donc
$$-\frac{1}{2}x^2 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \varepsilon_3(x)x^3.$$
   Pour le troisième produit on a
$$\varepsilon_1(x)x^3 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right) = \varepsilon_1(x)x^3 + x\varepsilon_1(x)x^3 + \cdots = \varepsilon_4(x)x^3$$
   On en arrive à :
$$\begin{aligned}\cos x \cdot \exp x &= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \varepsilon_1(x)x^3\right) \times \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right)\\ &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_1(x)x^3\\ &\quad - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \varepsilon_3(x)x^3\\ &\quad + \varepsilon_4(x)x^3 \qquad \text{il ne reste plus qu'à regrouper les termes :}\\ &= 1 + x + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})x^2 + (\frac{1}{6} - \frac{1}{2})x^3 + \varepsilon_5(x)x^3\\ &= 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon_5(x)x^3\end{aligned}$$

   Ainsi le dl de $\cos x \cdot \exp x$ en 0 à l'ordre 3 est :
$$\cos x \cdot \ln(1+x) = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon_5(x)x^3.$$

2. $(\ln(1+x))^2$ (à l'ordre 4).
   Il s'agit juste de multiplier le dl de $\ln(1+x)$ par lui-même. En fait si l'on réfléchit un peu on s'aperçoit qu'un dl à l'ordre 3 sera suffisant (car le terme constant est nul) :

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x)x^3$$

   $\varepsilon_5(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$.

$$\begin{aligned}
(\ln(1+x))^2 &= \ln(1+x) \times \ln(1+x) \\
&= \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x)x^3\right) \times \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x)x^3\right) \\
&= x \times \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x)x^3\right) \\
&\quad - \frac{1}{2}x^2 \times \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x)x^3\right) \\
&\quad + \frac{1}{3}x^3 \times \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x)x^3\right) \\
&\quad + \varepsilon(x)x^3 \times \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x)x^3\right) \\
&= x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \varepsilon(x)x^4 \\
&\quad - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \varepsilon_1(x)x^4 \\
&\quad + \frac{1}{3}x^4 + \varepsilon_2(x)x^4 \\
&\quad + \varepsilon_3(x)x^4 \\
&= x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + \varepsilon_4(x)x^4
\end{aligned}$$

3. $\dfrac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}$ (à l'ordre 6).
   Pour le dl de $\dfrac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}$ on commence par faire un dl du numérateur. Tout d'abord :

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \varepsilon(x)x^9$$

   donc

$$\operatorname{sh} x - x = \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \varepsilon(x)x^9.$$

   Il ne reste plus qu'à diviser par x^3 :

$$\frac{\operatorname{sh} x - x}{x^3} = \frac{\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \varepsilon(x)x^9}{x^3} = \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}x^2 + \frac{1}{7!}x^4 + \frac{1}{9!}x^6 + \varepsilon(x)x^6$$

   Remarquez que nous avons commencé par calculer un dl du numérateur à l'ordre 9, pour obtenir après division un dl à l'ordre 6.

4. $\exp\big(\sin(x)\big)$ (à l'ordre 4).
   On sait $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)$ et $\exp(u) = 1 + u + \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1}{3!}u^3 + \frac{1}{4!}u^4 + o(u^4)$.
   On note désormais toute fonction $\varepsilon(x)x^n$ (où $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$) par $o(x^n)$. Cela évite les multiples expressions $\varepsilon_i(x)x^n$.

On substitue $u = \sin(x)$, il faut donc calculer u, u^2, u^3 et u^4 :

$$u = \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)$$

$$u^2 = \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$u^3 = \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right)^3 = x^3 + o(x^4)$$

$$u^3 = x^4 + o(x^4) \quad \text{et} \quad o(u^4) = o(x^4)$$

Pour obtenir :

$$\begin{aligned}\exp(\sin(x)) &= 1 + x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\\ &\quad + \frac{1}{2!}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)\right)\\ &\quad + \frac{1}{3!}\left(x^3 + o(x^4)\right)\\ &\quad + \frac{1}{4!}\left(x^4 + o(x^4)\right)\\ &\quad + o(x^4)\\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

5. $\sin^6(x)$ (à l'ordre 9).
On sait $\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)$.
Si l'on voulait calculer un dl de $\sin^2(x)$ à l'ordre 5 on écrirait :

$$\sin^2(x) = \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right)^2 = \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right) \times \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right) = x^2 - 2\frac{1}{3!}x^4 + o(x^5).$$

En effet tous les autres termes sont dans $o(x^5)$.
Le principe est le même pour $\sin^6(x)$:

$$\sin^6(x) = \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right)^6 = \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right) \times \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right) \times \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right) \times \cdots$$

Lorsque l'on développe ce produit en commençant par les termes de plus petits degrés on obtient

$$\sin^6(x) = x^6 + 6 \cdot x^5 \cdot \left(-\frac{1}{3!}x^3\right) + o(x^9) = x^6 - x^8 + o(x^9)$$

6. $\ln\big(\cos(x)\big)$ (à l'ordre 6).
Le dl de $\cos x$ à l'ordre 6 est

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6).$$

Le dl de $\ln(1+u)$ à l'ordre 6 est $\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{6}u^6 + o(u^6)$.
On pose $u = -\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6)$ de sorte que

$$\ln(\cos x) = \ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{6}u^6 + o(u^6).$$

Il ne reste qu'à développer les u^k, ce qui n'est pas si dur que cela si les calculs sont bien menés et les puissances trop grandes écartées.

Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
u^2 &= \left(-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+o(x^6)\right)^2\\
&= \left(-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4\right)^2+o(x^6)\\
&= \left(-\frac{1}{2!}x^2\right)^2+2\left(-\frac{1}{2!}x^2\right)\left(\frac{1}{4!}x^4\right)+o(x^6)\\
&= \frac{1}{4}x^4-\frac{1}{24}x^6+o(x^6)
\end{aligned}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}
u^3 &= \left(-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+o(x^6)\right)^3\\
&= \left(-\frac{1}{2!}x^2\right)^3+o(x^6)\\
&= -\frac{1}{8}x^6+o(x^6)
\end{aligned}$$

En effet lorsque l'on développe u^3 le terme $(x^2)^6$ est le seul terme dont l'exposant est $\leqslant 6$.
Enfin les autres termes u^4, u^5, u^6 sont tous des $o(x^6)$. Et en fait développer $\ln(1+u)$ à l'ordre 3 est suffisant.
Il ne reste plus qu'à rassembler :

$$\begin{aligned}
\ln(\cos x) &= \ln(1+u)\\
&= u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3+o(u^3)\\
&= \left(-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+o(x^6)\right)\\
&\quad -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{24}x^6+o(x^6)\right)\\
&\quad +\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}x^6+o(x^6)\right)\\
&= -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o(x^6)
\end{aligned}$$

7. $\dfrac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4.
Le dl de $\cos x$ à l'ordre 4 est

$$\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4).$$

Le dl de $\frac{1}{1+u}$ à l'ordre 2 (qui sera suffisant ici) est $\frac{1}{1+u}=1-u+u^2+o(u^2)$.
On pose $u=-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)$ et on a $u^2=\frac{1}{4}x^4+o(x^4)$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1+u}\\
&= 1-u+u^2+o(u^2)\\
&= 1-\big(-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)\big)+\big(-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)\big)^2+o(x^4)\\
&= 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+o(x^4)
\end{aligned}$$

8. $\tan x$ (à l'ordre 5 (ou 7 pour les plus courageux)).
   Pour ceux qui souhaitent seulement un dl à l'ordre 5 de $\tan x = \sin x \times \frac{1}{\cos x}$ alors il faut multiplier le dl de $\sin x$ à l'ordre 5 par le dl de $\frac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4 (voir question précédente).
   Si l'on veut un dl de $\tan x$ à l'ordre 7 il faut d'abord refaire le dl $\frac{1}{\cos x}$ mais cette fois à l'ordre 6 :
   $$\frac{1}{\cos x} = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+o(x^6)$$
   Le dl à l'ordre 7 de $\sin x$ étant :
   $$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+o(x^7)$$
   Comme $\tan x = \sin x \times \frac{1}{\cos x}$, il ne reste donc qu'à multiplier les deux dl pour obtenir après calculs :
   $$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+o(x^7)$$
9. $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$ (à l'ordre 3).
   Si l'on pense bien à écrire $(1+x)^{\frac{1}{1+x}} = \exp\big(\frac{1}{1+x}\ln(1+x)\big)$ alors c'est juste des calculs utilisant les dl à l'ordre 3 de $\ln(1+x)$, $\frac{1}{1+x}$ et $\exp x$.
   On trouve
   $$(1+x)^{\frac{1}{1+x}} = 1+x-x^2+\frac{x^3}{2}+o(x^3).$$
10. $\arcsin\big(\ln(1+x^2)\big)$ (à l'ordre 6).
    Tout d'abord $\ln(1+x^2) = x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+o(x^6)$. Et $\arcsin u = u+\frac{u^3}{6}+o(u^3)$. Donc en posant $u = x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+o(x^6)$ on a :
    $$\begin{aligned}
    \arcsin\big(\ln(1+x^2)\big) &= \arcsin\left(x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+o(x^6)\right)\\
    &= \arcsin u\\
    &= u+\frac{1}{6}u^3+o(u^3)\\
    &= \left(x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}\right)+\frac{1}{6}\left(x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}\right)^3+o(x^6)\\
    &= \left(x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}\right)+\frac{x^6}{6}+o(x^6)\\
    &= x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{2}+o(x^6)
    \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Première méthode. On applique la formule de Taylor (autour du point $x=1$)

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+o((x-1)^3)$$

Comme $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac12}$ alors $f'(x)=\frac12 x^{-\frac12}$ et donc $f'(1)=\frac12$. Ensuite on calcule $f''(x)$ (puis $f''(1)$), $f'''(x)$ (et enfin $f'''(1)$).
On trouve le dl de $f(x)=\sqrt{x}$ au voisinage de $x=1$:

$$\sqrt{x}=1+\frac12(x-1)-\frac18(x-1)^2+\frac1{16}(x-1)^3+o((x-1)^3)$$

Deuxième méthode. Posons $h=x-1$ (et donc $x=h+1$). On applique la formule du dl de $\sqrt{1+h}$ autour de $h=0$.

$$\begin{aligned}f(x)=\sqrt{x}&=\sqrt{1+h}\\&=1+\frac12 h-\frac18 h^2+\frac1{16}h^3+o(h^3)\qquad\text{c'est la formule du dl de }\sqrt{1+h}\\&=1+\frac12(x-1)-\frac18(x-1)^2+\frac1{16}(x-1)^3+o((x-1)^3)\end{aligned}$$

2. La première méthode consiste à calculer $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\exp\sqrt{x}$, $g''(x)$, $g'''(x)$ puis $g(1)$, $g'(1)$, $g''(1)$, $g'''(1)$ pour pouvoir appliquer la formule de Taylor conduisant à :

$$\exp(\sqrt{x})=e+\frac{e}{2}(x-1)+\frac{e}{48}(x-1)^3+o((x-1)^3)$$

(avec $e=\exp(1)$).

Autre méthode. Commencer par calculer le dl de $k(x)=\exp x$ en $x=1$ ce qui est très facile car pour tout n, $k^{(n)}(x)=\exp x$ et donc $k^{(n)}(1)=e$:

$$\exp x=e+e(x-1)+\frac{e}{2!}(x-1)^2+\frac{e}{3!}(x-1)^3+o((x-1)^3).$$

Pour obtenir le dl $g(x)=h(\sqrt{x})$ en $x=1$ on écrit d'abord :

$$\exp(\sqrt{x})=e+e(\sqrt{x}-1)+\frac{e}{2!}(\sqrt{x}-1)^2+\frac{e}{3!}(\sqrt{x}-1)^3+o((\sqrt{x}-1)^3).$$

Il reste alors à substituer $\sqrt{x}$ par son dl obtenu dans la première question.

3. Posons $u=x-\frac{\pi}{3}$ (et donc $x=\frac{\pi}{3}+u$). Alors

$$\sin(x)=\sin(\frac{\pi}{3}+u)=\sin(\frac{\pi}{3})\cos(u)+\sin(u)\cos(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt3}{2}\cos u+\frac12\sin u$$

On connaît les dl de $\sin u$ et $\cos u$ autour de $u=0$ (car on cherche un dl autour de $x=\frac{\pi}{3}$) donc

$$\begin{aligned}\sin x&=\frac{\sqrt3}{2}\cos u+\frac12\sin u\\&=\frac{\sqrt3}{2}\left(1-\frac1{2!}u^2+o(u^3)\right)+\frac12\left(u-\frac1{3!}u^3+o(u^3)\right)\\&=\frac{\sqrt3}{2}+\frac12 u-\frac{\sqrt3}{4}u^2-\frac1{12}u^3+o(u^3)\\&=\frac{\sqrt3}{2}+\frac12(x-\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt3}{4}(x-\frac{\pi}{3})^2-\frac1{12}(x-\frac{\pi}{3})^3+o((x-\frac{\pi}{3})^3)\end{aligned}$$

Maintenant pour le dl de la forme $\ln(a+v)$ en $v=0$ on se ramène au dl de $\ln(1+v)$ ainsi :

$$\ln(a+v) = \ln\left(a(1+\frac{v}{a})\right) = \ln a + \ln(1+\frac{v}{a}) = \ln a + \frac{v}{a} - \frac{1}{2}\frac{v^2}{a^2} + \frac{1}{3}\frac{v^3}{a^3} + o(v^3)$$

On applique ceci à $h(x) = \ln(\sin x)$ en posant toujours $u = x - \frac{\pi}{3}$:

$$\begin{aligned}
h(x) = \ln(\sin x) &= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{4}u^2 - \frac{1}{12}u^3 + o(u^3)\right) \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{4}u^2 - \frac{1}{12}u^3 + o(u^3)\right)\right) \\
&= \cdots \qquad \text{on effectue le dl du } \ln \text{ et on regroupe les termes} \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}u - \frac{2}{3}u^2 + \frac{4}{9\sqrt{3}}u^3 + o(u^3) \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}(x-\frac{\pi}{3}) - \frac{2}{3}(x-\frac{\pi}{3})^2 + \frac{4}{9\sqrt{3}}(x-\frac{\pi}{3})^3 + o((x-\frac{\pi}{3})^3)
\end{aligned}$$

On trouve donc :

$$\ln(\sin x) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}(x-\frac{\pi}{3}) - \frac{2}{3}(x-\frac{\pi}{3})^2 + \frac{4}{9\sqrt{3}}(x-\frac{\pi}{3})^3 + o((x-\frac{\pi}{3})^3)$$

Bien sûr une autre méthode consiste à calculer $h(1)$, $h'(1)$, $h''(1)$ et $h'''(1)$.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Dl de $f(x)$ à l'ordre 2 en 0.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{1+x+1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)} \qquad \text{car } \sqrt{1+x^2} = 1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2) \\
&= \left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) \times \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o(x^4)} \qquad \text{on pose } u = \frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o(x^4) \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) \times \frac{1}{1+u} \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) \times \left(1-u+u^2+o(u^2)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) \times \left(1-(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4})+(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4})^2+o(x^2)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) \times \left(1-\frac{x}{2}+o(x^2)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) \\
&= \frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{4}+o(x^2)
\end{aligned}$$

2. En $+\infty$ on va poser $h = \frac{1}{x}$ et se ramener à un dl en $h = 0$.

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x\left(\frac{1}{x}+1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)} = \frac{\sqrt{1+h^2}}{1+h+\sqrt{1+h^2}} = f(h).$$

Ici -miraculeusement- on retrouve exactement l'expression de f dont on a déjà calculé le dl en $h = 0$: $f(h) = \frac{1}{2} - \frac{h}{4} + \frac{h^2}{4} + o(h^2)$. Ainsi

$$f(x) = f(h) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2} + o(\frac{1}{x^2})$$

3. Attention cela ne fonctionne plus du tout en $-\infty$. Dans le calcul de la deuxième question on était on voisinage de $+\infty$ et nous avons considéré que x était positif. En $-\infty$ il faut faire attention au signe, par exemple $\sqrt{1+x^2} = |x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = -x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$.
Ainsi toujours en posant $h = \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1+\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x\left(1+\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)} \\
&= -\frac{\sqrt{1+h^2}}{1+h-\sqrt{1+h^2}} \\
&= -\frac{1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)}{1+h-\left(1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)\right)} \\
&= -\frac{1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)}{h-\frac{1}{2}h^2+o(h^2)} \\
&= -\frac{1}{h}\frac{1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)}{1-\frac{1}{2}h+o(h)} \\
&= -\frac{1}{h}\left(1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)\right) \times \left(1+\frac{1}{2}h+\frac{1}{4}h^2+o(h^2)\right) \\
&= -\frac{1}{h}\left(1+\frac{1}{2}h+\frac{3}{4}h^2+o(h^2)\right) \\
&= -\frac{1}{h}-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}h+o(h) \\
&= -x-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})
\end{aligned}$$

Ainsi un développement (asymptotique) de f en $-\infty$ est

$$f(x) = -x-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})$$

On en déduit par exemple que $f(x)$ se comporte essentiellement comme la fonction $-x$ en $-\infty$ et en particulier $\lim_{x\to-\infty} f = +\infty$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. On a

$$e^{x^2} = 1+x^2+\frac{x^4}{2!}+o(x^4) \quad \text{et} \quad \cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$$

On s'aperçoit qu'en fait un dl à l'ordre 2 suffit :

$$e^{x^2}-\cos x=\left(1+x^2+o(x^2)\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)=\frac{3}{2}x^2+o(x^2)$$

Ainsi $\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\frac{3}{2}+o(1)$ (où $o(1)$ désigne une fonction qui tend vers 0) et donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\frac{3}{2}$$

2. On sait que

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\quad \text{et}\quad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3).$$

Les dl sont distincts dès le terme de degré 2 donc un dl à l'ordre 2 suffit :

$$\ln(1+x)-\sin x=\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-\left(x+o(x^2)\right)=-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

donc

$$\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x}=-\frac{x}{2}+o(x)$$

et ainsi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x}=0.$$

3. Sachant

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$$

et

$$\sqrt{1-x^2}=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{x^4}&=\frac{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)-\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right)}{x^4}\\&=\frac{\frac{1}{6}x^4+o(x^4)}{x^4}\\&=\frac{1}{6}+o(1)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{x^4}=\frac{1}{6}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

Commençons en $x=0$, le dl de $f(x)=\ln(1+x+x^2)$ à l'ordre 2 est

$$\ln(1+x+x^2)=(x+x^2)-\frac{(x+x^2)^2}{2}+o(x^2)=x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

Par identification avec $f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$ cela entraîne donc $f(0)=0$, $f'(0)=1$ (et $f''(0)=1$). L'équation de la tangente est donc $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ donc $y=x$.
La position par rapport à la tangente correspond à l'étude du signe de $f(x)-y(x)$ où $y(x)$ est l'équation de la tangente.

$$f(x)-y(x)=x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\ -\ x=\frac{1}{2}x^2+o(x^2).$$

Ainsi pour x suffisamment proche de 0, $f(x) - y(x)$ est du signe de $\frac{1}{2}x^2$ et est donc positif. Ainsi dans un voisinage de 0 la courbe de f est au-dessus de la tangente en 0.

Même étude en $x = 1$.
Il s'agit donc de faire le dl de $f(x)$ en $x = 1$. On pose $x = 1 + h$ (de sorte que $h = x - 1$ est proche de 0) :

$$\begin{aligned}
f(x) = \ln(1+x+x^2) &= \ln\left(1+(1+h)+(1+h)^2\right) \\
&= \ln\left(3+3h+h^2\right) \\
&= \ln\left(3\big(1+h+\frac{h^2}{3}\big)\right) \\
&= \ln 3 + \ln\big(1+h+\frac{h^2}{3}\big) \\
&= \ln 3 + \big(h+\frac{h^2}{3}\big) - \frac{\big(h+\frac{h^2}{3}\big)^2}{2} + o\big((h+\frac{h^2}{3})^2\big) \\
&= \ln 3 + h + \frac{h^2}{3} - \frac{h^2}{2} + o(h^2) \\
&= \ln 3 + h - \frac{1}{6}h^2 + o(h^2) \\
&= \ln 3 + (x-1) - \frac{1}{6}(x-1)^2 + o((x-1)^2)
\end{aligned}$$

La tangente en $x = 1$ est d'équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ et est donc donnée par le dl à l'ordre 1 : c'est $y = (x-1) + \ln 3$. Et la différence $f(x) - \big(\ln 3 + (x-1)\big) = -\frac{1}{6}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$ est négative pour x proche de 1. Donc, dans un voisinage de 1, le graphe de f est en-dessous de la tangente en $x = 1$.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. (a) La première limite n'est pas une forme indéterminée, en effet

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x+2} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x+2} + x = +\infty$$

(b) Lorsque $x \to -\infty$ la situation est tout autre car

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x+2} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

donc $\sqrt{x^2+3x+2} + x$ est une forme indéterminée !
Calculons un développement limité à l'ordre 1 en $-\infty$ en faisant très attention au signe (car par exemple $|x| = -x$) :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+3x+2} + x &= |x|\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} - 1\right) \\
&= |x|\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right) + o(\frac{1}{x}) \ -1\right) \\
&= |x|\left(\frac{1}{2}\frac{3}{x} + o(\frac{1}{x})\right) \\
&= -\frac{3}{2} + o(1)
\end{aligned}$$

Et donc

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x+2} + x = -\frac{3}{2}$$

2. Nous utiliserons que

$$\begin{aligned}(\arctan x)^{\frac{1}{x^2}} &= \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln(\arctan x)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\left(x+o(x)\right)\right) \qquad \text{car } \arctan x = x+o(x)\end{aligned}$$

Mais lorsque $x \to 0^+$ on sait que $\ln(x+o(x)) \to -\infty$, $x^2 \to 0$ donc :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+o(x))}{x^2} = -\infty$$

Composé avec l'exponentielle on trouve :

$$\lim_{x\to 0^+} (\arctan x)^{\frac{1}{x^2}} = 0$$

3. Effectuons le dl à l'ordre 2 : comme

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$$

alors

$$(1+3x)^{\frac{1}{3}} = 1+x-x^2+o(x^2).$$

$$\sin x = x+o(x^2) \qquad \text{et } \cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-1-\sin x}{1-\cos x} &= \frac{-x^2+o(x^2)}{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} \\ &= \frac{-1+o(1)}{\frac{1}{2}+o(1)} \qquad \text{après factorisation par } x^2 \\ &= -2+o(1)\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-1-\sin x}{1-\cos x} = -2$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Habituellement on trouve le développement limité d'une fonction à partir des dérivées successives. Ici on va faire l'inverse.

Calcul du dl (à un certain ordre) :

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^3}{1+x^6} = x^3\frac{1}{1+x^6} \\ &= x^3\left(1-x^6+x^{12}-\cdots\pm x^{6\ell}\cdots\right) \\ &= x^3-x^9+x^{15}-\cdots\pm x^{3+6\ell}\cdots \\ &= \sum_{\ell\geqslant 0}(-1)^\ell x^{3+6\ell}\end{aligned}$$

Il s'agit d'identifier ce développement avec la formule de Taylor :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

Par unicité des DL, en identifiant les coefficients devant x^n on trouve :

$$\begin{cases} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^\ell & \text{si } n = 3+6\ell \\ \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $n = 3+6\ell$ (avec $\ell \in \mathbb{N}$) alors on peut écrire $\ell = \frac{n-3}{6}$ et donc on peut conclure :

$$\begin{cases} f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n-3}{6}} \cdot n! & \text{si } n \equiv 3 \pmod 6 \\ f^{(n)}(0) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1. La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre x et $x+h$ (avec $h > 0$) donne :
$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(c_{x,h})\frac{h^2}{2!}$$
où $c_{x,h} \in]x, x+h[$.
Cela donne :
$$f'(x)h = f(x+h) - f(x) - f''(c_{x,h})\frac{h^2}{2!}.$$
On peut maintenant majorer $f'(x)$:
$$\begin{aligned} h|f'(x)| &\leqslant |f(x+h)| + |f(x)| + \frac{h^2}{2}\left|f''(c_{x,h})\right| \\ &\leqslant 2M_0 + \frac{h^2}{2}M_2 \end{aligned}$$
Donc
$$|f'(x)| \leqslant \frac{2}{h}M_0 + \frac{h}{2}M_2.$$
2. Soit $\phi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\phi(h) = \frac{h}{2}M_2 + \frac{2}{h}M_0$. C'est une fonction continue et dérivable. La limite en 0 et $+\infty$ est $+\infty$. La dérivée $\phi'(h) = \frac{1}{2}M_2 - \frac{2M_0}{h^2}$ s'annule en $h_0 = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$ et en ce point ϕ atteint son minimum $\phi(h_0) = 2\sqrt{M_0M_2}$.
Fixons $x > a$. Comme pour tout $h > 0$ on a $|f'(x)| \leqslant \frac{h}{2}M_2 + \frac{2}{h}M_0 = \phi(h)$ alors en particulier pour $h = h_0$ on obtient $|f'(x)| \leqslant \phi(h_0) = 2\sqrt{M_0M_2}$. Et donc f' est bornée.
3. Fixons $\varepsilon > 0$. g'' est bornée, notons $M_2 = \sup_{x>0}|g''(x)|$. Comme $g(x) \to 0$ alors il existe $a > 0$ tel que sur l'intervalle $]a, +\infty[$, g soit aussi petit que l'on veut. Plus précisément nous choisissons a de sorte que
$$M_0 = \sup_{x>a}|g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4M_2}.$$
La première question appliquée à g sur l'intervalle $]a, +\infty[$ implique que pour tout $h > 0$:
$$|g'(x)| \leqslant \frac{2}{h}M_0 + \frac{h}{2}M_2$$
En particulier pour $h = \frac{\varepsilon}{M_2}$ et en utilisant $M_0 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4M_2}$ on obtient :
$$|g'(x)| \leqslant \frac{2}{\frac{\varepsilon}{M_2}}\frac{\varepsilon^2}{4M_2} + \frac{\frac{\varepsilon}{M_2}}{2}M_2 \leqslant \varepsilon.$$
Ainsi pour chaque ε on a trouvé $a > 0$ tel que si $x > a$ alors $|g'(x)| \leqslant \varepsilon$. C'est exactement dire que $\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0$.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Notons I_n l'intervalle $\left]n\pi-\frac{\pi}{2}, n\pi+\frac{\pi}{2}\right[$. Alors sur chaque I_n la fonction définie par $f(x)=\tan x-x$ est un fonction continue et dérivable. De plus $f'(x)=1+\tan^2 x-1=\tan^2 x$. La dérivée est strictement positive sauf en un point où elle est nulle et ainsi la fonction f est strictement croissante sur I_n. La limite à gauche est $-\infty$ et la limite à droite est $+\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique $x_n \in I_n$ tel que $f(x_n)=0$ c'est-à-dire $\tan x_n = x_n$.
2. $x \mapsto \arctan x$ est la bijection réciproque de la restriction de la tangente $\tan_| :]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[\to]-\infty,+\infty[$. Sur ces intervalles on a bien $\tan x = y \iff x=\arctan y$. Mais si $y \notin]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$ il faut d'abord se ramener dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$.
   Ainsi $x_n \in I_n$ donc $x_n-n\pi \in]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$. Maintenant $x_n=\tan(x_n)=\tan(x_n-n\pi)$.
   Donc $\arctan x_n = \arctan\big(\tan(x_n-n\pi)\big)=x_n-n\pi$. Ainsi
   $$x_n = \arctan x_n + n\pi.$$
   L'erreur classique est de penser que $\arctan(\tan x)=x$. Ce qui n'est vrai que pour $x\in]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$!
3. Comme $x_n \in I_n$ alors $x_n \to +\infty$ lorsque $n\to+\infty$.
   On sait par ailleurs que pour $x>0$ on a $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$. Ainsi $\arctan x_n = \frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{x_n}$
   Lorsque n tend vers $+\infty$ alors $\frac{1}{x_n}\to 0$ donc $\arctan\frac{1}{x_n}\to 0$.
   Ainsi
   $$x_n = n\pi+\arctan x_n = n\pi+\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{x_n}=n\pi+\frac{\pi}{2}+o(1).$$
4. On va utiliser le dl obtenu précédemment pour obtenir un dl à un ordre plus grand :
   $$\begin{aligned}
   x_n &= n\pi+\arctan x_n\\
   &= n\pi+\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{x_n}\\
   &= n\pi+\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}+o(1)}\\
   &= n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}+o(1)}+o(\frac{1}{n^2}) \qquad \text{car } \arctan u = u+o(u^2) \text{ en } u=0\\
   &= n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n\pi}\frac{1}{1+\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}+o(\frac{1}{n^2})\\
   &= n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n\pi}\big(1-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})\big)+o(\frac{1}{n^2})\\
   &= n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n\pi}+\frac{1}{2\pi n^2}+o(\frac{1}{n^2})
   \end{aligned}$$
   Ainsi en $+\infty$ on a le développement :
   $$x_n = n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n\pi}+\frac{1}{2\pi n^2}+o(\frac{1}{n^2}).$$

Correction de l'exercice 10 ▲

Il s'agit bien sûr de calculer un développement limité, le premier terme de ce développement donne l'équivalent cherché.

1. Le dl à l'ordre 3 en 0 est
$$2e^x-\sqrt{1+4x}-\sqrt{1+6x^2}=-\frac{11x^3}{3}+o(x^3)$$
donc
$$2e^x-\sqrt{1+4x}-\sqrt{1+6x^2}\sim-\frac{11x^3}{3}.$$
2. De même
$$(\cos x)^{\sin x}-(\cos x)^{\tan x}\sim\frac{x^5}{4}.$$
3. On pose $h=x-\sqrt{3}$ alors
$$\arctan x+\arctan\frac{3}{x}-\frac{2\pi}{3}=-\frac{h^2}{8\sqrt{3}}+o(h^2)$$
donc
$$\arctan x+\arctan\frac{3}{x}-\frac{2\pi}{3}\sim-\frac{(x-\sqrt{3})^2}{8\sqrt{3}}.$$
4. En $+\infty$
$$\sqrt{x^2+1}-2\sqrt[3]{x^3+x}+\sqrt[4]{x^4+x^2}=\frac{1}{12x}+o(\frac{1}{x})$$
donc
$$\sqrt{x^2+1}-2\sqrt[3]{x^3+x}+\sqrt[4]{x^4+x^2}\sim\frac{1}{12x}.$$
5. Il faut distinguer les cas $x>0$ et $x<0$ pour trouver :
$$\operatorname{argch}\left(\frac{1}{\cos x}\right)\sim|x|.$$

Correction de l'exercice 11 ▲

Le dl de $\cos x$ en 0 à l'ordre 6 est :
$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+o(x^6).$$
Calculons celui de $\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$:
$$\begin{aligned}\frac{1+ax^2}{1+bx^2}&=(1+ax^2)\times\frac{1}{1+bx^2}\\&=(1+ax^2)\times\big(1-bx^2+b^2x^4-b^3x^6+o(x^6)\big)\qquad\text{car }\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-u^3+o(u^3)\\&=\quad\cdots\qquad\text{on développe}\\&=1+(a-b)x^2-b(a-b)x^4+b^2(a-b)x^6+o(x^6)\end{aligned}$$
Notons $\Delta(x)=\cos x-\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ alors
$$\Delta(x)=\big(-\frac{1}{2}-(a-b)\big)x^2+\big(\frac{1}{24}+b(a-b)\big)x^4+\big(-\frac{1}{720}-b^2(a-b)\big)x^6+o(x^6).$$
Pour que cette différence soit la plus petite possible (lorsque x est proche de 0) il faut annuler le plus possible de coefficients de bas degré. On souhaite donc avoir
$$-\frac{1}{2}-(a-b)=0\qquad\text{et}\qquad\frac{1}{24}+b(a-b)=0.$$

En substituant l'égalité de gauche dans celle de droite on trouve :

$$a = -\frac{5}{12} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{1}{12}.$$

On obtient alors

$$\Delta(x) = \big(-\frac{1}{720} - b^2(a-b)\big)x^6 + o(x^6) = \frac{1}{480}x^6 + o(x^6).$$

Avec notre choix de a,b nous avons obtenu une très bonne approximation de $\cos x$. Par exemple lorsque l'on évalue $\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ (avec $a = -\frac{5}{12}$ et $b = \frac{1}{12}$) en $x = 0.1$ on trouve :

$$0.9950041631\ldots$$

Alors que

$$\cos(0.1) = 0.9950041652\ldots$$

En l'on trouve ici $\Delta(0.1) \simeq 2\times 10^{-9}$.

Correction de l'exercice 12 ▲

$$\ln(x+1) = \ln\left(x\times(1+\frac{1}{x})\right) = \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln x + \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$$

Donc

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1 + \frac{1}{x\ln x} + o(\frac{1}{x\ln x}).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x &= \exp\left(x\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)\right) \\
&= \exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x\ln x}+o(\frac{1}{x\ln x})\right)\right) \\
&= \exp\left(x\left(\frac{1}{x\ln x}+o(\frac{1}{x\ln x})\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{\ln x}+o(\frac{1}{\ln x})\right) \\
&= 1+\frac{1}{\ln x}+o(\frac{1}{\ln x})
\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x = 1$$

et que lorsque $x\to+\infty$

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1 \sim \frac{1}{\ln x}.$$
