TD Chapitre 9 : Suites réelles

Questions de cours : must-know

1) Qu'est-ce qu'une suite convergente ? et qu'est-ce qu'une suite divergente ?
2) Est-ce que toute suite réelle convergente est bornée ? et le contraire ?
3) Enoncer le théorème de Bolzano-Weirstrass.
4) Donner, après démonstration, la formule de la somme des termes d'une suite arithmétique du rang 0 au rang n.
5) Donner, après démonstration, la formule de la somme des termes d'une suite géométrique du rang 0 au rang n.
6) Donner, après démonstration, la formule de la somme des termes d'une suite arithmético-géométrique du rang 0 au rang n.
7) Donner la limite de chacune de ces suites.
8) Enoncer le théorème de convergence des suites réelles (4 cas).
9) Donner la définition de suites adjacentes.
10) Enoncer le théorème de convergence des suites adjacentes.
11) Soit (u_n) une suite réelle. Donner la définition d'une suite extraite de la suite (u_n).
12) Si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers une même limite, que peut-on dire de (u_n) ?
13) Si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ne tendent pas vers la même limite, que peut-on dire de (u_n) ?
14) Donner la définition d'une suite récurrente.
15) Soit (u_n) une suite récurrente de fonction f, énoncer la proposition du cours pour une fonction f croissante.
16) Même chose pour f croissante.
17) Donner le théorème sur les suites récurrentes exploitant l'IAF.

Remarque : vous pouvez, en vous aidant de cette liste de questions et en la complétant, vous faire un petit résumé du cours sur les suites.

Limites :

Exercice 1 :

a) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} 2+\frac{(-1)^n}{1+n+n^2}\ ; \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{e^n}{\ln(n)}\ ; \qquad \lim_{n\to+\infty} e^n-\ln(n)$$

$$\lim_{n\to+\infty} n-n^2\ ; \qquad \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

b) Calculer les limites des suites définies par :

$$u_n = n^{1/n}\ ; \qquad u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ ; \qquad u_n=\frac{(-1)^n}{n}\ ;$$

$$u_n = n!\ ; \qquad u_n=\frac{n+\cos(n)}{n+\sin(n)}\ ; \qquad u_n=\frac{\cos(n)}{\sin(n)+\ln(n)}$$

Exercice 2 :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et la suite définie par : $\forall n \geq 0,\ u_n = \frac{E(nx+1)}{n+1}$ (E étant la fonction partie entière).

Calculer la limite de cette suite.

Exercice 3 :

Calculer les limites des suites suivantes :

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k)}{n^2+k}$; $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$; $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}}$

Généralités & Théorème de convergence :

Exercice 4 :

a) La suite $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\geq 0}$ est-elle monotone ? bornée ?

b) La suite $\left(\frac{n.\sin(n!)}{1+n^2}\right)_{n\geq 0}$ est-elle bornée ?

Exercice 5 :

Soit $x > 0$.

a) Montrer que la suite $\left(\frac{x^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang.
b) Calculer ce rang.

Exercice 6 :

Soit une suite (u_n) qui converge vers une limite $l \in \mathbb{R}^+$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $u_n > 0$.

Exercice 7 :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites, avec $v_n \longrightarrow +\infty$.

a) Montrer que si (u_n) est minorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$.
b) Montrer que si (u_n) est minorée par $\lambda > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n . v_n = +\infty$.

Exercice 8 :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, avec (u_n) une suite croissante, (v_n) convergente et $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

Montrer que (u_n) converge.

Exercice 9 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geq 1, u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}$

a) Montrer que cette suite est croissante et majorée par 2.
b) Que peut-on en conclure ?

Exercice 10 :

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

a) Ecrire u_n sous la forme d'une somme (une série) en utilisant le symbole $\sum$
b) Montrer que $\forall n \geq 1, u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$
c) En déduire que (u_n) est convergente.

Exercice 11 : Suite harmonique

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

a) Ecrire u_n sous la forme d'une somme (une série) en utilisant le symbole $\sum$
b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
c) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ u_{2^p} - u_{2^{p-1}} \geq \frac{1}{2}$
d) En déduire que $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ u_{2^p} - 1 \geq \frac{p}{2}$
e) En déduire que (u_n) n'est pas bornée.
f) En déduire la limite de $\lim u_n = +\infty$.

Exercice 12 :

Déterminer le terme général (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13 :

a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $(-1)^n . e^n$ admet-elle une limite ?
b) Et la suite de terme général $\frac{1}{u_n}$?

Suites Adjacentes :

Exercice 14 :

Soit : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

a) Montrer que les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
b) Que dire de la convergence de la suite (S_n) ?

Exercice 15 :

a) Montrer que les suites de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.(n!)}$ sont adjacentes.
b) Que peut-on en déduire ?

Exercice 16 :

[Moyenne arithmético-géométrique]
a) Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^{+2}$, établir :

$$2\sqrt{ab} \leqslant a+b$$

b) On considère les suites de réels positifs (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 = a, v_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant v_n$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ et $v_{n+1} \leqslant v_n$.
c) Etablir que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.

c) Etablir que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.
Cette limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et est notée $M(a,b)$.
d) Calculer $M(a,a)$ et $M(a,0)$ pour $a \in \mathbb{R}^+$.
e) Exprimer $M(\lambda a, \lambda b)$ en fonction de $M(a,b)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Suites récurrentes :

Exercice 17 :

Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad \text{avec} \quad f(x) = 1 + \sqrt{x}$$

a) Montrer que f est croissante sur son domaine de définition.
b) Montrer que $f([1,3]) \subset [1,3]$.
c) Montrer que (u_n) converge et calculer sa limite.

Exercice 18 :

Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad \text{avec} \quad f(x) = \frac{1}{9}x^3 + 1$$

a) Etudier suffisamment les fonctions f et $g: x \longmapsto f(x) - x$ pour tracer correctement le graphique de la fonction f et sa position par rapport à la première bissectrice $(y = x)$.
b) Montrer que f admet sur $\mathbb{R}^+$ deux points fixes l et l' tels que $0 < l < l'$.
c) Choisir le bon segment $[a,b]$ tel que $u_0 \in [a,b]$ et $f([a,b]) \subset [a,b]$.
d) Montrer que (u_n) converge vers l.
e) Montrer que $l \in \left[1, \sqrt{3}\right]$.

Exercice 19 :

Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad \text{avec} \quad f(x) = \frac{4}{x+2}$$

Etudier la suite (u_n).

Exercice 20 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geq 1, u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}$

Etudier la suite (u_n).

Exercice 21 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

Etudier en détail la suite (u_n).

Exercice 22 :

Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé et $f : \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par la formule suivante :

$$f(x) = \frac{1+x^n}{(1+x)^n}, \quad x \geqslant 0.$$

1. (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $f'(x)$ pour $x \geqslant 0$.
   (b) En étudiant le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^+$, montrer que f atteint un minimum sur $\mathbb{R}^+$ que l'on déterminera.
2. (a) En déduire l'inégalité suivante :

$$(1+x)^n \leqslant 2^{n-1}(1+x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

   (b) Montrer que si $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$ alors on a

$$(x+y)^n \leqslant 2^{n-1}(x^n + y^n).$$