TD chapitre 8 : Dérivation des fonctions réelles

Tangentes aux graphes de fonctions

Exercice 1 :

Calculer l'équation de la tangente (T_0) à la courbe d'équation $y = x^3 - x^2 - x$ au point d'abscisse $x_0 = 2$.

Calculer x_1 afin que la tangente (T_1) au point d'abscisse x_1 soit parallèle à (T_0).

Parité

Exercice 2 :

Montrer que si f est une fonction paire et dérivable, alors f' est une fonction impaire.

Dérivabilité

Exercice 3 :

a) Montrer que la fonction $f(x) = \begin{cases} x.sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Sur quel domaine est-elle dérivable ?

b) Montrer que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0. (Utiliser la méthode de la limite du taux d'accroissement).

Exercice 4 :

Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer leurs dérivées :

$arctan, \quad arccos, \quad argth, \quad f(x) = arctanx + arctan(1/x)$

Exercice 5 :

Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer leurs dérivées :

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad g(x) = \frac{x}{(1+x)^n}$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad h(x) = a^x,\ a > 0$ $\quad k(x) = x^x$

Exercice 6 :

Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer leurs dérivées :

$x \longmapsto \ln(\tan(x))$ $\qquad$ $x \longmapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$ $\qquad$ $x \longmapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}$ $\qquad$ $x \longmapsto \tan\left(e^{x^2}\right)$

$x \longmapsto \frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$ $\qquad$ $x \longmapsto (x^2-1).\arccos(x^2)$

Exercice 7 :

Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

Fonctions réciproques - bijections

Exercice 8 :

Soit $f\ :]1, +\infty[\longrightarrow]-1, +\infty[$ définie par $f(x) = x.\ln(x) - x$.

Montrer que f est une bijection.

Notons $g = f^{-1}$, calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

Exercice 9 :

Soit $f: [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \sqrt{\sin(x)} + x$$

Justifier que f réalise une bijection vers un intervalle à préciser, puis que f^{-1} est continue et dérivable sur cet intervalle.

Extremums

Exercice 10 :

Soit $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 2$.

Etudier la fonction f. Tracer son graphique. Montrer que f admet un minimum local et un maximum local.

Exercice 11 :

Calculer en quel point la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet un maximum local.

Théorème de Rolle

Exercice 12 :

Soit $f\colon [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que $f(0) = f(1) = f(2) = 0$.

Montrer qu'il existe $c \in]0,2[$ tel que $f''(c) = 0$.

TAF, IAF (Théorème des Accroissements Finis, Inégalité des Accroissements Finis)

Exercice 13 :

a) Montrer que $\forall x > 0,\ \ln(1+x) - \ln(x) < \frac{1}{x}$

b) Soit la fonction $f(x) = e^x$. Que donne l'IAF sur l'intervalle $[0,x]$?

c) Majorer $|e^x - 1|$ en fonction de $|x|$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 14 :

a) Montrer en utilisant l'IAF que $\forall x, y \in \mathbb{R},\quad |\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$

b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\quad |\sin(x)| \leq |x|$

Exercice 15 :

Soient x et y deux réels avec $0 < x < y$. Montrer que :

$$x < \frac{y-x}{\ln(y) - \ln(x)} < y$$

Exercice 16 :

En utilisant la règle de l'Hôpital, calculer les limites lorsque $x \longrightarrow 0$ de :

$\frac{x}{(1+x)^n - 1}$ $\quad\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$ $\quad\frac{1-\cos(x)}{\tan(x)}$

Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \frac{arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

Dérivées successives

Exercice 17 :

Calculer les dérivées successives de :

$f(x) = ln(1+x)$ et $g(x) = ln(x).x^3$