

TD chapitre 7 : Fonctions Usuelles**Questions de cours :**

- Donner l'équation générale d'une droite, comment peut-on retrouver la pente d'une droite ?
- Donner la définition de la fonction *arccos* (domaine de définition, domaine d'arrivée, expression de la fonction). Tracer son graphique.
- Même question pour les fonctions *arcsin*, *arctan*, *ch*, *sh*, *th*, *argch*, *argsh* et *argth*.
- Même question pour les fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$, pour le cas général $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Même question pour $x \mapsto x^\alpha$, avec $\alpha = 1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0$.

Exercice 1 :

Montrer que $\forall a, b > 0, \quad \frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Exercice 2 :

Simplifier a^b pour $a = \exp(x^2)$ et $b = \frac{1}{x} \cdot \ln(x^{1/x})$

Exercice 3 :

Parmi les relations suivantes, lesquelles sont exactes :

- $(a^b)^c = a^{bc}$
- $a^b \cdot a^c = a^{bc}$
- $a^{2b} = (a^b)^2$
- $(ab)^c = a^{c/2} \cdot b^{c/2}$
- $(a^b)^c = a^{(b^c)}$
- $(a^b)^c = (a^c)^b$?

Exercice 4 :

Comparer: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^x)}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x)^x$

Exercice 5 :

Déterminer les limites suivantes : a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sqrt{x}}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x}$

Exercice 6 :

- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(1 + e^x) = x + \ln(1 + e^{-x})$
- Etudier la fonction $f(x) = \ln(x^2 + 1) - \ln(x) - 1$. Tracer son graphique et résoudre l'équation $f(x) = 0$.
- Montrer que $\forall x \geq 0, \ln(1 + x) \geq x - \frac{x^2}{2}$.

Exercice 7 :

- a) Montrer que $\forall x \in [-\pi, 0], \arccos(\cos(x)) = -x$
- b) Que vaut $\arccos(\cos(x)) \forall x \in [\pi, 2\pi]$?
- c) Que vaut $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$?

Exercice 8 :

Calculer les valeurs de \arccos et \arcsin en $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$. Pareil pour \arctan en $0, 1, \sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Calculer $\arccos\left(\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right)$, $\arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right)$ et $\arctan\left(\tan\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right)$.

Exercice 9 :

Calculer $\cos(\arctan(x))$, $\cos(\arcsin(x))$, $\tan(\arcsin(x))$.

Exercice 10 :

- a) Calculer $\sin(\arccos(x))$, $\forall x \in [-1, 1]$.
- b) Calculer la dérivée de \arccos , celle de \arcsin et de \arctan dans les domaines adéquats.

Exercice 11 :

Calculer la dérivée de $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. En déduire que $f(x) = \arcsin(x)$, $\forall x \in]-1, 1[$.

Montrer que $\forall x \in [-1, 1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$

Exercice 12 :

Montrer que $\forall x \in [-1, 1], \arcsin(x) + \arccos(x) = \pi/2$.

En déduire les solutions sur $[-1, 1]$ de l'équation $\arcsin(x) - \arccos(x) = \pi/6$.

Exercice 13 :

Etudier la fonction $f: x \mapsto \arcsin(\sin(x))$ et tracer son graphique.

Exercice 14 :

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Exercice 15:

- a) Montrer que $\forall x > 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \pi/2$

b) Montrer que $\forall x < 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\pi/2$

Exercice 16 :

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, ch^2(x) - sh^2(x) = 1$

b) Calculer $sh(\operatorname{argch}(x)), ch(\operatorname{argsh}(x))$ dans les bons domaines de définition à préciser.

c) Calculer les dérivées de $\operatorname{argch}, \operatorname{argsh}$ et argth .

Exercice 17 :

Montrer que dans le bon domaine à préciser :

$$\operatorname{Argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$$\operatorname{Argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

Exemple d'idée : dériver ...

Exercice 18 :

Calculer dans le bon domaine à préciser : $th(\operatorname{argsh}(x))$

Exercice 19 :

a) Etablir que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \operatorname{sh}(x) \geq x$

b) Etablir que $\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}$