

TD Chapitre 11 : Développements Limités

Question de cours N° 1 : Formules de T-Y

Ecrire la formule de Taylor-Young pour **en 0** à **l'ordre 3** puis **à l'ordre n** quelconque $\in \mathbb{N}$, des fonctions suivantes :

- $e^x, e^{-x}, ch(x), sh(x), \cos(x)$ et $\sin(x)$.
- $\ln(1+x)$ puis celui de $\frac{1}{1+x}$
- $(1+x)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. En déduire celui de $\frac{1}{1+x}$ et celui de $\sqrt{1+x}$
- Déduire de la formule de Taylor-Young de $(1+x)^\alpha$, celui de $\frac{1}{1-x}$

Questions de cours N° 2 : DLs usuels (en $a = 0$)

- Ecrire le DL à l'ordre n de e^x en 0 : $DL_n(e^x, 0)$. En déduire le $DL_n(e^{-x}, 0)$.
- En déduire $DL_{2n+2}(sh(x), 0)$ et le $DL_{2n+1}(ch(x), 0)$.
- Ecrire le $DL_n\left(\frac{1}{1-x}, 0\right)$. En déduire le $DL_n\left(\frac{1}{1+x}, 0\right)$.
- Justifier l'expression du DL de $\frac{1}{1-x}$ à l'aide d'une suite géométrique.

Exercice 1 : Calculer les DL suivants : DLs en $a \neq 0$

$$DL_4(\cos(x), \pi); \quad DL_3(\ln(2+5x), 1); \quad DL_n(sh(x), -1); \quad DL_2(\sqrt{x}, 2)$$

Exercice 2 : Calculer les DL suivants : Produit de DLs

$$DL_3(x \cdot \cos(2x), 0); \quad DL_3(\cos(x) \cdot \sin(2x), 0); \quad DL_3\left(\frac{e^x}{1-x}, 0\right)$$

Exercice 3 : Calculer les DL suivants : Division de DLs

$$DL_6(\tan(x), 0); \quad DL_4\left(\frac{2+x}{3+x}, 0\right); \quad DL_4\left(\frac{\cos(x)}{ch(x)}, 0\right); \quad DL_3\left(\frac{\sin(x)}{sh(x)}, 0\right); \quad DL_3\left(\frac{1}{1+e^x}, 0\right)$$

Exercice 4 : Calculer les DL suivants : *Composition de DLs*

$$DL_6(\ln(1 + x^2 + x^3), 0); \quad DL_4(\sqrt{\sin(x)}, 0); \quad DL_3(\sqrt[3]{1+x}, 0);$$
$$DL_2(\sqrt{1 + 2 \cos(x)}, 0); \quad DL_2(\exp(1 + 2 \cos(x)), 0); \quad DL_3(\ln(1 + \sin(x)), 1)$$

Exercice 5 : Calculer les DL suivants : *Intégration de DLs*

$$DL_n(\arctan(x), 0); \quad DL_3(\arccos(x), 0); \quad DL_n(\ln(1 + x), 0) \text{ par intégration de DL.}$$

Exercice 6 : *Application de la formule de TRI* (Formule de Taylor-Young avec reste Intégral)

Approcher $\cos(0.01)$ à 10^{-12} près. Indice : $x = 0.01, a = 0, n = 4$.

Approcher e^1 à 10^{-10} près. Indice : $x = 1, a = 0, n$ à trouver.