TD Chapitre 10 : Intégration

Exercices 1 à 5 :

1. En admettant que $\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$. Calculer l'intégrale $\int_0^1 P(x)\,dx$ où $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. Trouver un polynôme $P(x)$ non nul de degré 2 dont l'intégrale est nulle : $\int_0^1 P(x)\,dx = 0$.

2. A-t-on $\int_a^b f(x)^2\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2$; $\int_a^b \sqrt{f(x)}\,dx = \sqrt{\int_a^b f(x)\,dx}$; $\int_a^b |f(x)|\,dx = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$; $\int |f(x)+g(x)|\,dx = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| + \left|\int_a^b g(x)\,dx\right|$?

3. Peut-on trouver $a < b$ tels que $\int_a^b x\,dx = -1$; $\int_a^b x\,dx = 0$; $\int_a^b x\,dx = +1$? Mêmes questions avec $\int_a^b x^2\,dx$.

4. Montrer que $0 \leqslant \int_1^2 \sin^2 x\,dx \leqslant 1$ et $\left|\int_a^b \cos^3 x\,dx\right| \leqslant |b-a|$.

5. Quand est-ce qu'on a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz ?

Exercice 6 :

Calculer les limites des sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{k/n}}{n} \;; \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} \;; \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} \;;$$

Calculer la limite de la suite suivante :

$$\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{1/n}$$

Exercice 7 :

Calculer par linéarisation : $\int_0^{\pi/2} sin^3\,(t)dt$

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt, \qquad \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}dt, \qquad \int_1^2 \frac{1}{t^2}dt, \qquad \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$\int_0^{\pi/2} cos^2\,(t)dt, \qquad \int_1^2 \ln t\,dt, \qquad \int_0^{\pi/4} \sin(x).\cos(2x).dt$$

Exercice 8 :

Pour $m, n \in \mathbb{N}$, calculer :

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt) \, . \cos(nt) \, dt$$

Exercice 9 : IPP

Calculer en utilisant l'IPP : $\int_0^{\pi/2} sin^3\,(t)dt$

Calculer : $\int_0^1 x. e^x dx$ $\int_1^e x. \ln(x)\, dx$ $\int_0^1 t. \arctan(t)\, dt$ $\int_a^x \arcsin(x)\, dx$

$\int_0^1 \ln(1+t^2)\, dt$ $\int_1^e t^n. \ln(t)\, dt$ $\int_1^{e^\pi} sin(ln(t))\, dt$

Exercice 10 : IPP

Calculer : $\int x^2. e^x dx$ $\int t. sin(t)dt$ $\int t. ln(t)dt$ $\int t. sin^3(t)dt$

$\int (t^3 - t^2 + t). sin(t)dt$ $\int (t-2). sin(t)dt$

Exercice 11 : Changement de variable

Calculer en utilisant un changement de variable : $\int_0^{\pi/2} sin^3\,(t)dt$

Calculer les primitives de :

te^{t^2} $\frac{\ln(t)}{t}$ $\frac{1}{t.\ln(t)}$ $\cos(t)\, . \sin(t)$ $\tan(t)$ $cos^3(t)$

Calculer les primitives suivantes :

$\int \frac{t^2}{1+t^3} dt$ $\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt$ $\int \frac{t}{1+t^4} dt$ $\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt$

Calculer :

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx$$

Exercice 12 : Changement de variable

Calculer les primitives suivantes :

$\int \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ $\int \frac{e^{2t} dt}{e^t+1}$

Calculer :

$$\int_1^e \frac{dt}{t. \sqrt{\ln(t)+1}}$$

Exercice 13 : Calculer :

$$I = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan(x))\, dx$$

Exercice 14 : Suite définie par une intégrale

Soit

$$I_n = \int_1^n \frac{\sin(nx)}{1+x^n}\,dx$$

Montrer que $I_n \longrightarrow 0$

Exercice 15 : Suite définie par une intégrale

Soit

$$I_n = \int_0^{\pi/2} sin^n(t)\,dt$$

a) Calculer I_n en fonction de I_{n-2}.

b) Donner le terme général de I_{2p} et I_{2p+1} en fonction de $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 16 : Fractions rationnelles

Calculer :

$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}$ $\quad \int \frac{4x+5}{x^2+x-2}$ $\quad \int \frac{1}{(x-2)^2+1}$