# Polynômes

Vidéo ■ partie 1. Définitions
Vidéo ■ partie 2. Arithmétique des polynômes
Vidéo ■ partie 3. Racine d'un polynôme, factorisation
Vidéo ■ partie 4. Fractions rationnelles
Fiche d'exercices ♦ Polynômes
Fiche d'exercices ♦ Fractions rationnelles

## Motivation

Les polynômes sont des objets très simples mais aux propriétés extrêmement riches. Vous savez déjà résoudre les équations de degré 2 : $aX^2+bX+c=0$. Savez-vous que la résolution des équations de degré 3, $aX^3+bX^2+cX+d=0$, a fait l'objet de luttes acharnées dans l'Italie du XVIᵉ siècle ? Un concours était organisé avec un prix pour chacune de trente équations de degré 3 à résoudre. Un jeune italien, Tartaglia, trouve la formule générale des solutions et résout les trente équations en une seule nuit ! Cette méthode que Tartaglia voulait garder secrète sera quand même publiée quelques années plus tard comme la « méthode de Cardan ».
Dans ce chapitre, après quelques définitions des concepts de base, nous allons étudier l'arithmétique des polynômes. Il y a une grande analogie entre l'arithmétique des polynômes et celles des entiers. On continue avec un théorème fondamental de l'algèbre : « Tout polynôme de degré $n$ admet $n$ racines complexes. » On termine avec les fractions rationnelles : une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes.

**Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désignera l'un des corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.**

## 1. Définitions

### 1.1. Définitions

**Définition 1.**
Un *polynôme* à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une expression de la forme

$$P(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_2X^2+a_1X+a_0,$$

avec $n\in\mathbb{N}$ et $a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{K}$.
L'ensemble des polynômes est noté $\mathbb{K}[X]$.

- Les $a_i$ sont appelés les *coefficients* du polynôme.
- Si tous les coefficients $a_i$ sont nuls, $P$ est appelé le *polynôme nul*, il est noté 0.
- On appelle le *degré* de $P$ le plus grand entier $i$ tel que $a_i\neq 0$ ; on le note $\deg P$. Pour le degré du polynôme nul on pose par convention $\deg(0)=-\infty$.
- Un polynôme de la forme $P=a_0$ avec $a_0\in\mathbb{K}$ est appelé un *polynôme constant*. Si $a_0\neq 0$, son degré est 0.

**Exemple 1.**
- $X^3-5X+\frac{3}{4}$ est un polynôme de degré 3.
- $X^n+1$ est un polynôme de degré $n$.

- 2 est un polynôme constant, de degré 0.

## 1.2. Opérations sur les polynômes

- **Égalité.** Soient $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ et $Q = b_nX^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1X + b_0$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
$$P = Q \iff \forall i \quad a_i = b_i$$
et on dit que $P$ et $Q$ sont égaux.
- **Addition.** Soient $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ et $Q = b_nX^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1X + b_0$.
On définit :
$$P + Q = (a_n + b_n)X^n + (a_{n-1} + b_{n-1})X^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)X + (a_0 + b_0)$$
- **Multiplication.** Soient $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ et $Q = b_mX^m + b_{m-1}X^{m-1} + \cdots + b_1X + b_0$. On définit
$$P \times Q = c_rX^r + c_{r-1}X^{r-1} + \cdots + c_1X + c_0$$
$$\text{avec } r = n + m \text{ et } c_k = \sum_{i+j=k} a_ib_j \text{ pour } k \in \{0, \ldots, r\}.$$
- **Multiplication par un scalaire.** Si $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\lambda \cdot P$ est le polynôme dont le $i$-ème coefficient est $\lambda a_i$.

**Exemple 2.**
- Soient $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ et $Q = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$. Alors $P + Q = aX^3 + (b + \alpha)X^2 + (c + \beta)X + (d + \gamma)$, $P \times Q = (a\alpha)X^5 + (a\beta + b\alpha)X^4 + (a\gamma + b\beta + c\alpha)X^3 + (b\gamma + c\beta + d\alpha)X^2 + (c\gamma + d\beta)X + d\gamma$. Enfin $P = Q$ si et seulement si $a = 0$, $b = \alpha$, $c = \beta$ et $d = \gamma$.
- La multiplication par un scalaire $\lambda \cdot P$ équivaut à multiplier le polynôme constant $\lambda$ par le polynôme $P$.

L'addition et la multiplication se comportent sans problème :

**Proposition 1.**
*Pour $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$ alors*
- $0 + P = P, \quad P + Q = Q + P, \quad (P + Q) + R = P + (Q + R);$
- $1 \cdot P = P, \quad P \times Q = Q \times P, \quad (P \times Q) \times R = P \times (Q \times R);$
- $P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R.$

Pour le degré il faut faire attention :

**Proposition 2.**
*Soient $P$ et $Q$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.*
$$\boxed{\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q}$$
$$\boxed{\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)}$$

On note $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg P \leqslant n\}$. Si $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $P + Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

## 1.3. Vocabulaire

Complétons les définitions sur les polynômes.

**Définition 2.**
- Les polynômes comportant un seul terme non nul (du type $a_kX^k$) sont appelés ***monômes***.
- Soit $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$, un polynôme avec $a_n \neq 0$. On appelle ***terme dominant*** le monôme $a_nX^n$. Le coefficient $a_n$ est appelé le ***coefficient dominant*** de $P$.
- Si le coefficient dominant est 1, on dit que $P$ est un ***polynôme unitaire***.

**Exemple 3.**
$P(X) = (X-1)(X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1)$. On développe cette expression : $P(X) = \left(X^{n+1} + X^n + \cdots + X^2 + X\right) - \left(X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1\right) = X^{n+1} - 1$. $P(X)$ est donc un polynôme de degré $n+1$, il est unitaire et est somme de deux monômes : $X^{n+1}$ et $-1$.

**Remarque.**
Tout polynôme est donc une somme finie de monômes.

**Mini-exercices.**

1. Soit $P(X) = 3X^3 - 2$, $Q(X) = X^2 + X - 1$, $R(X) = aX + b$. Calculer $P + Q$, $P \times Q$, $(P + Q) \times R$ et $P \times Q \times R$. Trouver $a$ et $b$ afin que le degré de $P - QR$ soit le plus petit possible.
2. Calculer $(X+1)^5 - (X-1)^5$.
3. Déterminer le degré de $(X^2 + X + 1)^n - aX^{2n} - bX^{2n-1}$ en fonction de $a, b$.
4. Montrer que si $\deg P \neq \deg Q$ alors $\deg(P + Q) = \max(\deg P, \deg Q)$. Donner un contre-exemple dans le cas où $\deg P = \deg Q$.
5. Montrer que si $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots$ alors le coefficient devant $X^{n-1}$ de $P(X - \frac{a_{n-1}}{n})$ est nul.

# 2. Arithmétique des polynômes

Il existe de grandes similitudes entre l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$ et l'arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$. Cela nous permet d'aller assez vite et d'omettre certaines preuves.

## 2.1. Division euclidienne

**Définition 3.**
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, on dit que $B$ ***divise*** $A$ s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$. On note alors $B|A$.

On dit aussi que $A$ est multiple de $B$ ou que $A$ est divisible par $B$.
Outre les propriétés évidentes comme $A|A$, $1|A$ et $A|0$ nous avons :

**Proposition 3.**
*Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$.*

1. *Si $A|B$ et $B|A$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $A = \lambda B$.*
2. *Si $A|B$ et $B|C$ alors $A|C$.*
3. *Si $C|A$ et $C|B$ alors $C|(AU + BV)$, pour tout $U, V \in \mathbb{K}[X]$.*

**Théorème 1** (Division euclidienne des polynômes)**.**
*Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$, alors il existe un unique polynôme $Q$ et il existe un unique polynôme $R$ tels que :*

$$\boxed{A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B.}$$

$Q$ est appelé le ***quotient*** et $R$ le ***reste*** et cette écriture est la ***division euclidienne*** de $A$ par $B$.
Notez que la condition $\deg R < \deg B$ signifie $R = 0$ ou bien $0 \leqslant \deg R < \deg B$.
Enfin $R = 0$ si et seulement si $B|A$.

*Démonstration.*
**Unicité.** Si $A = BQ + R$ et $A = BQ' + R'$, alors $B(Q - Q') = R' - R$. Or $\deg(R' - R) < \deg B$. Donc $Q' - Q = 0$. Ainsi $Q = Q'$, d'où aussi $R = R'$.
**Existence.** On montre l'existence par récurrence sur le degré de $A$.

- Si $\deg A = 0$ et $\deg B > 0$, alors $A$ est une constante, on pose $Q = 0$ et $R = A$. Si $\deg A = 0$ et $\deg B = 0$, on pose $Q = A/B$ et $R = 0$.
- On suppose l'existence vraie lorsque $\deg A \leqslant n - 1$. Soit $A = a_n X^n + \cdots + a_0$ un polynôme de degré $n$ ($a_n \neq 0$). Soit $B = b_m X^m + \cdots + b_0$ avec $b_m \neq 0$. Si $n < m$ on pose $Q = 0$ et $R = A$.
  Si $n \geqslant m$ on écrit $A = B \cdot \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} + A_1$ avec $\deg A_1 \leqslant n - 1$. On applique l'hypothèse de récurrence à $A_1$ : il existe $Q_1, R_1 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A_1 = BQ_1 + R_1$ et $\deg R_1 < \deg B$. Il vient :
  $$A = B\left(\frac{a_n}{b_m} X^{n-m} + Q_1\right) + R_1.$$
  Donc $Q = \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} + Q_1$ et $R = R_1$ conviennent.

$\square$

**Exemple 4.**
On pose une division de polynômes comme on pose une division euclidienne de deux entiers. Par exemple si $A = 2X^4 - X^3 - 2X^2 + 3X - 1$ et $B = X^2 - X + 1$. Alors on trouve $Q = 2X^2 + X - 3$ et $R = -X + 2$. On n'oublie pas de vérifier qu'effectivement $A = BQ + R$.

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 2X^4 - X^3 - 2X^2 + 3X - 1 & X^2 - X + 1 \\ \cline{3-3}
- & 2X^4 - 2X^3 + 2X^2 \phantom{+ 3X - 1} & \\ \cline{2-2}
 & X^3 - 4X^2 + 3X - 1 & 2X^2 + X - 3 \\
- & X^3 - \phantom{4}X^2 + \phantom{3}X \phantom{- 1} & \\ \cline{2-2}
 & -3X^2 + 2X - 1 & \\
- & -3X^2 + 3X - 3 & \\ \cline{2-2}
 & -X + 2 &
\end{array}
$$

**Exemple 5.**
Pour $X^4 - 3X^3 + X + 1$ divisé par $X^2 + 2$ on trouve un quotient égal à $X^2 - 3X - 2$ et un reste égale à $7X + 5$.

$$
\begin{array}{rr|l}
 & X^4 - 3X^3 + \phantom{2X^2 +} X + 1 & X^2 + 2 \\ \cline{3-3}
- & X^4 \phantom{- 3X^3} + 2X^2 \phantom{+ X + 1} & \\ \cline{2-2}
 & -3X^3 - 2X^2 + X + 1 & X^2 - 3X - 2 \\
- & -3X^3 \phantom{- 2X^2} - 6X \phantom{+ 1} & \\ \cline{2-2}
 & -2X^2 + 7X + 1 & \\
- & -2X^2 \phantom{+ 7X} - 4 & \\ \cline{2-2}
 & 7X + 5 &
\end{array}
$$

## 2.2. pgcd

**Proposition 4.**
*Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, avec $A \neq 0$ ou $B \neq 0$. Il existe un unique polynôme unitaire de plus grand degré qui divise à la fois $A$ et $B$.*

Cet unique polynôme est appelé le *pgcd* (plus grand commun diviseur) de $A$ et $B$ que l'on note $\operatorname{pgcd}(A, B)$.

**Remarque.**

- $\operatorname{pgcd}(A, B)$ est un polynôme unitaire.
- Si $A|B$ et $A \neq 0$, $\operatorname{pgcd}(A, B) = \frac{1}{\lambda} A$, où $\lambda$ est le coefficient dominant de $A$.
- Pour tout $\lambda \in K^*$, $\operatorname{pgcd}(\lambda A, B) = \operatorname{pgcd}(A, B)$.
- Comme pour les entiers : si $A = BQ + R$ alors $\operatorname{pgcd}(A, B) = \operatorname{pgcd}(B, R)$. C'est ce qui justifie l'algorithme d'Euclide.

**Algorithme d'Euclide.**
Soient $A$ et $B$ des polynômes, $B \neq 0$.
On calcule les divisions euclidiennes successives,

$$\begin{array}{ll} A = BQ_1 + R_1 & \deg R_1 < \deg B \\ B = R_1Q_2 + R_2 & \deg R_2 < \deg R_1 \\ R_1 = R_2Q_3 + R_3 & \deg R_3 < \deg R_2 \\ \vdots & \\ R_{k-2} = R_{k-1}Q_k + R_k & \deg R_k < \deg R_{k-1} \\ R_{k-1} = R_kQ_{k+1} & \end{array}$$

Le degré du reste diminue à chaque division. On arrête l'algorithme lorsque le reste est nul. Le pgcd est le dernier reste non nul $R_k$ (rendu unitaire).

**Exemple 6.**
Calculons le pgcd de $A = X^4 - 1$ et $B = X^3 - 1$. On applique l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{array}{rcl} X^4 - 1 & = & (X^3 - 1) \times X + X - 1 \\ X^3 - 1 & = & (X - 1) \times (X^2 + X + 1) + 0 \end{array}$$

Le pgcd est le dernier reste non nul, donc $\operatorname{pgcd}(X^4 - 1, X^3 - 1) = X - 1$.

**Exemple 7.**
Calculons le pgcd de $A = X^5 + X^4 + 2X^3 + X^2 + X + 2$ et $B = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4$.

$$\begin{array}{rcl} X^5 + X^4 + 2X^3 + X^2 + X + 2 & = & (X^4 + 2X^3 + X^2 - 4) \times (X - 1) + 3X^3 + 2X^2 + 5X - 2 \\ X^4 + 2X^3 + X^2 - 4 & = & (3X^3 + 2X^2 + 5X - 2) \times \frac{1}{9}(3X + 4) - \frac{14}{9}(X^2 + X + 2) \\ 3X^3 + 2X^2 + 5X - 2 & = & (X^2 + X + 2) \times (3X - 1) + 0 \end{array}$$

Ainsi $\operatorname{pgcd}(A, B) = X^2 + X + 2$.

**Définition 4.**
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que $A$ et $B$ sont ***premiers entre eux*** si $\operatorname{pgcd}(A, B) = 1$.

Pour $A, B$ quelconques on peut se ramener à des polynômes premiers entre eux : si $\operatorname{pgcd}(A, B) = D$ alors $A$ et $B$ s'écrivent : $A = DA'$, $B = DB'$ avec $\operatorname{pgcd}(A', B') = 1$.

## 2.3. Théorème de Bézout

**Théorème 2** (Théorème de Bézout)**.**
*Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes avec $A \neq 0$ ou $B \neq 0$. On note $D = \operatorname{pgcd}(A, B)$. Il existe deux polynômes $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = D$.*

Ce théorème découle de l'algorithme d'Euclide et plus spécialement de sa remontée comme on le voit sur l'exemple suivant.

**Exemple 8.**
Nous avons calculé $\operatorname{pgcd}(X^4 - 1, X^3 - 1) = X - 1$. Nous remontons l'algorithme d'Euclide, ici il n'y avait qu'une ligne : $X^4 - 1 = (X^3 - 1) \times X + X - 1$, pour en déduire $X - 1 = (X^4 - 1) \times 1 + (X^3 - 1) \times (-X)$. Donc $U = 1$ et $V = -X$ conviennent.

**Exemple 9.**
Pour $A = X^5 + X^4 + 2X^3 + X^2 + X + 2$ et $B = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4$ nous avions trouvé $D = \operatorname{pgcd}(A, B) = X^2 + X + 2$. En partant de l'avant dernière ligne de l'algorithme d'Euclide on a d'abord : $B = (3X^3 + 2X^2 + 5X - 2) \times \frac{1}{9}(3X + 4) - \frac{14}{9}D$ donc

$$-\frac{14}{9}D = B - (3X^3 + 2X^2 + 5X - 2) \times \frac{1}{9}(3X + 4).$$

La ligne au-dessus dans l'algorithme d'Euclide était : $A = B \times (X - 1) + 3X^3 + 2X^2 + 5X - 2$. On substitue le reste pour obtenir :

$$-\frac{14}{9}D = B - \big(A - B \times (X - 1)\big) \times \frac{1}{9}(3X + 4).$$

On en déduit

$$-\frac{14}{9}D = -A \times \frac{1}{9}(3X + 4) + B\big(1 + (X - 1) \times \frac{1}{9}(3X + 4)\big)$$

Donc en posant $U = \frac{1}{14}(3X + 4)$ et $V = -\frac{1}{14}\big(9 + (X - 1)(3X + 4)\big) = -\frac{1}{14}(3X^2 + X + 5)$ on a $AU + BV = D$.

Le corollaire suivant s'appelle aussi le théorème de Bézout.

**Corollaire 1.**
*Soient $A$ et $B$ deux polynômes. $A$ et $B$ sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux polynômes $U$ et $V$ tels que $AU + BV = 1$.*

**Corollaire 2.**
*Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$ avec $A \neq 0$ ou $B \neq 0$. Si $C|A$ et $C|B$ alors $C|\operatorname{pgcd}(A, B)$.*

**Corollaire 3** (Lemme de Gauss)**.**
*Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$. Si $A|BC$ et $\operatorname{pgcd}(A, B) = 1$ alors $A|C$.*

## 2.4. ppcm

**Proposition 5.**
*Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes non nuls, alors il existe un unique polynôme unitaire $M$ de plus petit degré tel que $A|M$ et $B|M$.*

Cet unique polynôme est appelé le *ppcm* (plus petit commun multiple) de $A$ et $B$ qu'on note $\operatorname{ppcm}(A, B)$.

**Exemple 10.**
$\operatorname{ppcm}\left(X(X-2)^2(X^2+1)^4, (X+1)(X-2)^3(X^2+1)^3\right) = X(X+1)(X-2)^3(X^2+1)^4$.

De plus le ppcm est aussi le plus petit au sens de la divisibilité :

**Proposition 6.**
*Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes non nuls et $M = \operatorname{ppcm}(A, B)$. Si $C \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme tel que $A|C$ et $B|C$, alors $M|C$.*

**Mini-exercices.**

1. Trouver les diviseurs de $X^4 + 2X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Montrer que $X - 1 | X^n - 1$ (pour $n \geqslant 1$).
3. Calculer les divisions euclidiennes de $A$ par $B$ avec $A = X^4 - 1$, $B = X^3 - 1$. Puis $A = 4X^3 + 2X^2 - X - 5$ et $B = X^2 + X$ ; $A = 2X^4 - 9X^3 + 18X^2 - 21X + 2$ et $B = X^2 - 3X + 1$ ; $A = X^5 - 2X^4 + 6X^3$ et $B = 2X^3 + 1$.
4. Déterminer le pgcd de $A = X^5 + X^3 + X^2 + 1$ et $B = 2X^3 + 3X^2 + 2X + 3$. Trouver les coefficients de Bézout $U, V$. Mêmes questions avec $A = X^5 - 1$ et $B = X^4 + X + 1$.
5. Montrer que si $AU + BV = 1$ avec $\deg U < \deg B$ et $\deg V < \deg A$ alors les polynômes $U, V$ sont uniques.

# 3. Racine d'un polynôme, factorisation

## 3.1. Racines d'un polynôme

**Définition 5.**
Soit $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$. Pour un élément $x \in \mathbb{K}$, on note $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. On associe ainsi au polynôme $P$ une *fonction polynôme* (que l'on note encore $P$)

$$P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

**Définition 6.**
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que $\alpha$ est une *racine* (ou un *zéro*) de $P$ si $P(\alpha) = 0$.

**Proposition 7.**

$$P(\alpha) = 0 \iff X - \alpha \text{ divise } P$$

*Démonstration.* Lorsque l'on écrit la division euclidienne de $P$ par $X-\alpha$ on obtient $P = Q \cdot (X-\alpha)+R$ où $R$ est une constante car $\deg R < \deg(X-\alpha) = 1$. Donc $P(\alpha) = 0 \iff R(\alpha) = 0 \iff R = 0 \iff X-\alpha|P$. □

**Définition 7.**
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que $\alpha$ est une ***racine de multiplicité $k$*** de $P$ si $(X-\alpha)^k$ divise $P$ alors que $(X-\alpha)^{k+1}$ ne divise pas $P$. Lorsque $k = 1$ on parle d'une ***racine simple***, lorsque $k = 2$ d'une ***racine double***, etc.

On dit aussi que $\alpha$ est une ***racine d'ordre $k$***.

**Proposition 8.**
*Il y a équivalence entre :*
*(i) $\alpha$ est une racine de multiplicité $k$ de $P$.*
*(ii) Il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)^k Q$, avec $Q(\alpha) \neq 0$.*
*(iii) $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.*

La preuve est laissée en exercice.

**Remarque.**
Par analogie avec la dérivée d'une fonction, si $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$ alors le polynôme $P'(X) = a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1}$ est le ***polynôme dérivé*** de $P$.

## 3.2. Théorème de d'Alembert-Gauss

Passons à un résultat essentiel de ce chapitre :

**Théorème 3** (Théorème de d'Alembert-Gauss)**.**
*Tout polynôme à coefficients complexes de degré $n \geqslant 1$ a au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Il admet exactement $n$ racines si on compte chaque racine avec multiplicité.*

Nous admettons ce théorème.

**Exemple 11.**
Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2 à coefficients réels : $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.
- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors $P$ admet 2 racines réelles distinctes $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$ alors $P$ admet 2 racines complexes distinctes $\frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $\frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$ alors $P$ admet une racine réelle double $\frac{-b}{2a}$.

En tenant compte des multiplicités on a donc toujours exactement 2 racines.

**Exemple 12.**
$P(X) = X^n - 1$ admet $n$ racines distinctes.
Sachant que $P$ est de degré $n$ alors par le théorème de d'Alembert-Gauss on sait qu'il admet $n$ racines comptées avec multiplicité. Il s'agit donc maintenant de montrer que ce sont des racines simples. Supposons –par l'absurde– que $\alpha \in \mathbb{C}$ soit une racine de multiplicité $\geqslant 2$. Alors $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) = 0$. Donc $\alpha^n - 1 = 0$ et $n\alpha^{n-1} = 0$. De la seconde égalité on déduit $\alpha = 0$, contradictoire avec la première égalité. Donc toutes les racines sont simples. Ainsi les $n$ racines sont distinctes. (Remarque : sur cet exemple particulier on aurait aussi pu calculer les racines qui sont ici les racines $n$-ième de l'unité.)

Pour les autres corps que les nombres complexes nous avons le résultat plus faible suivant :

**Théorème 4.**
*Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Alors $P$ admet au plus $n$ racines dans $\mathbb{K}$.*

**Exemple 13.**
$P(X) = 3X^3 - 2X^2 + 6X - 4$. Considéré comme un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, $P$ n'a qu'une seule racine (qui est simple) $\alpha = \frac{2}{3}$ et il se décompose en $P(X) = 3(X - \frac{2}{3})(X^2 + 2)$. Si on considère maintenant $P$ comme un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ alors $P(X) = 3(X - \frac{2}{3})(X - \mathrm{i}\sqrt{2})(X + \mathrm{i}\sqrt{2})$ et admet 3 racines simples.

## 3.3. Polynômes irréductibles

**Définition 8.**
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $\geqslant 1$, on dit que $P$ est ***irréductible*** si pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$ divisant $P$, alors, soit $Q \in \mathbb{K}^*$, soit il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $Q = \lambda P$.

**Remarque.**
- Un polynôme irréductible $P$ est donc un polynôme non constant dont les seuls diviseurs de $P$ sont les constantes ou $P$ lui-même (à une constante multiplicative près).
- La notion de polynôme irréductible pour l'arithmétique de $\mathbb{K}[X]$ correspond à la notion de nombre premier pour l'arithmétique de $\mathbb{Z}$.
- Dans le cas contraire, on dit que $P$ est ***réductible*** ; il existe alors des polynômes $A, B$ de $\mathbb{K}[X]$ tels que $P = AB$, avec $\deg A \geqslant 1$ et $\deg B \geqslant 1$.

**Exemple 14.**
- Tous les polynômes de degré 1 sont irréductibles. Par conséquent il y a une infinité de polynômes irréductibles.
- $X^2 - 1 = (X-1)(X+1) \in \mathbb{R}[X]$ est réductible.
- $X^2 + 1 = (X - \mathrm{i})(X + \mathrm{i})$ est réductible dans $\mathbb{C}[X]$ mais est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
- $X^2 - 2 = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$ est réductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Nous avons l'équivalent du lemme d'Euclide de $\mathbb{Z}$ pour les polynômes :

**Proposition 9** (Lemme d'Euclide).
*Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme irréductible et soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Si $P|AB$ alors $P|A$ ou $P|B$.*

*Démonstration.* Si $P$ ne divise pas $A$ alors $\operatorname{pgcd}(P, A) = 1$ car $P$ est irréductible. Donc, par le lemme de Gauss, $P$ divise $B$. □

## 3.4. Théorème de factorisation

**Théorème 5.**
*Tout polynôme non constant $A \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit comme un produit de polynômes irréductibles unitaires :*

$$A = \lambda P_1^{k_1} P_2^{k_2} \cdots P_r^{k_r}$$

*où $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $r \in \mathbb{N}^*$, $k_i \in \mathbb{N}^*$ et les $P_i$ sont des polynômes irréductibles distincts.*
*De plus cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.*

Il s'agit bien sûr de l'analogue de la décomposition d'un nombre en facteurs premiers.

## 3.5. Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

**Théorème 6.**
*Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.*
*Donc pour $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ la factorisation s'écrit $P = \lambda(X-\alpha_1)^{k_1}(X-\alpha_2)^{k_2}\cdots(X-\alpha_r)^{k_r}$, où $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont les racines distinctes de $P$ et $k_1, \ldots, k_r$ sont leurs multiplicités.*

*Démonstration.* Ce théorème résulte du théorème de d'Alembert-Gauss. □

**Théorème 7.**
*Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 ainsi que les polynômes de degré 2 ayant un discriminant $\Delta < 0$.*
*Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Alors la factorisation s'écrit $P = \lambda(X-\alpha_1)^{k_1}(X-\alpha_2)^{k_2}\cdots(X-\alpha_r)^{k_r} Q_1^{\ell_1}\cdots Q_s^{\ell_s}$, où les $\alpha_i$ sont exactement les racines réelles distinctes de multiplicité $k_i$ et les $Q_i$ sont des polynômes irréductibles de degré 2 : $Q_i = X^2 + \beta_i X + \gamma_i$ avec $\Delta = \beta_i^2 - 4\gamma_i < 0$.*

**Exemple 15.**
$P(X) = 2X^4(X-1)^3(X^2+1)^2(X^2+X+1)$ est déjà décomposé en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ alors que sa décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ est $P(X) = 2X^4(X-1)^3(X-\mathrm{i})^2(X+\mathrm{i})^2(X-j)(X-j^2)$ où $j = e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

**Exemple 16.**
Soit $P(X) = X^4+1$.

- Sur $\mathbb{C}$. On peut d'abord décomposer $P(X) = (X^2+\mathrm{i})(X^2-\mathrm{i})$. Les racines de $P$ sont donc les racines carrées complexes de i et $-$i. Ainsi $P$ se factorise dans $\mathbb{C}[X]$ :
$$P(X) = \left(X - \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\right)\left(X + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\right)\left(X - \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})\right)\left(X + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})\right).$$
- Sur $\mathbb{R}$. Pour un polynôme à coefficient réels, si $\alpha$ est une racine alors $\bar{\alpha}$ aussi. Dans la décomposition ci-dessus on regroupe les facteurs ayant des racines conjuguées, cela doit conduire à un polynôme réel :
$$\begin{aligned} P(X) &= \left[\left(X - \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\right)\left(X - \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})\right)\right]\left[\left(X + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\right)\left(X + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})\right)\right] \\ &= \left[X^2+\sqrt{2}X+1\right]\left[X^2-\sqrt{2}X+1\right], \end{aligned}$$
qui est la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

**Mini-exercices.**

1. Trouver un polynôme $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ de degré minimal tel que : $\frac{1}{2}$ soit une racine simple, $\sqrt{2}$ soit une racine double et i soit une racine triple.
2. Montrer cette partie de la proposition 8 : « $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) = 0 \iff \alpha$ est une racine de multiplicité $\geqslant 2$ ».
3. Montrer que pour $P \in \mathbb{C}[X]$ : « $P$ admet une racine de multiplicité $\geqslant 2 \iff P$ et $P'$ ne sont pas premiers entre eux ».
4. Factoriser $P(X) = (2X^2+X-2)^2(X^4-1)^3$ et $Q(X) = 3(X^2-1)^2(X^2-X+\frac{1}{4})$ dans $\mathbb{C}[X]$. En déduire leur pgcd et leur ppcm. Mêmes questions dans $\mathbb{R}[X]$.
5. Si $\mathrm{pgcd}(A,B) = 1$ montrer que $\mathrm{pgcd}(A+B, A\times B) = 1$.
6. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ tel que $P(\alpha) = 0$. Vérifier que $P(\bar{\alpha}) = 0$. Montrer que $(X-\alpha)(X-\bar{\alpha})$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{R}[X]$ et qu'il divise $P$ dans $\mathbb{R}[X]$.

# 4. Fractions rationnelles

**Définition 9.**
Une ***fraction rationnelle*** à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une expression de la forme
$$F = \frac{P}{Q}$$
où $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ sont deux polynômes et $Q \neq 0$.

Toute fraction rationnelle se décompose comme une somme de fractions rationnelles élémentaires que l'on appelle des « éléments simples ». Mais les éléments simples sont différents sur $\mathbb{C}$ ou sur $\mathbb{R}$.

## 4.1. Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$

**Théorème 8** (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$)**.**
*Soit $P/Q$ une fraction rationnelle avec $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, $\mathrm{pgcd}(P,Q) = 1$ et $Q = (X-\alpha_1)^{k_1}\cdots(X-\alpha_r)^{k_r}$. Alors il existe une et une seule écriture :*
$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} = E &+ \frac{a_{1,1}}{(X-\alpha_1)^{k_1}} + \frac{a_{1,2}}{(X-\alpha_1)^{k_1-1}} + \cdots + \frac{a_{1,k_1}}{(X-\alpha_1)} \\ &+ \frac{a_{2,1}}{(X-\alpha_2)^{k_2}} + \cdots + \frac{a_{2,k_2}}{(X-\alpha_2)} \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

Le polynôme $E$ s'appelle la ***partie polynomiale*** (ou ***partie entière***). Les termes $\frac{a}{(X-\alpha)^i}$ sont les ***éléments simples*** sur $\mathbb{C}$.

**Exemple 17.**

- Vérifier que $\frac{1}{X^2+1} = \frac{a}{X+\mathrm{i}} + \frac{b}{X-\mathrm{i}}$ avec $a = \frac{1}{2}\,\mathrm{i}$, $b = -\frac{1}{2}\,\mathrm{i}$.
- Vérifier que $\frac{X^4-8X^2+9X-7}{(X-2)^2(X+3)} = X+1+\frac{-1}{(X-2)^2}+\frac{2}{X-2}+\frac{-1}{X+3}$.

Comment se calcule cette décomposition ? En général on commence par déterminer la partie polynomiale. Tout d'abord si $\deg Q > \deg P$ alors $E(X) = 0$. Si $\deg P \leqslant \deg Q$ alors effectuons la division euclidienne de $P$ par $Q$ : $P = QE + R$ donc $\frac{P}{Q} = E + \frac{R}{Q}$ où $\deg R < \deg Q$. La partie polynomiale est donc le quotient de cette division. Et on s'est ramené au cas d'une fraction $\frac{R}{Q}$ avec $\deg R < \deg Q$. Voyons en détails comment continuer sur un exemple.

**Exemple 18.**

Décomposons la fraction $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{X^5-2X^3+4X^2-8X+11}{X^3-3X+2}$.

- **Première étape : partie polynomiale.** On calcule la division euclidienne de $P$ par $Q$ : $P(X) = (X^2+1)Q(X) + 2X^2-5X+9$. Donc la partie polynomiale est $E(X) = X^2+1$ et la fraction s'écrit $\frac{P(X)}{Q(X)} = X^2+1+\frac{2X^2-5X+9}{Q(X)}$. Notons que pour la fraction $\frac{2X^2-5X+9}{Q(X)}$ le degré du numérateur est strictement plus petit que le degré du dénominateur.
- **Deuxième étape : factorisation du dénominateur.** $Q$ a pour racine évidente $+1$ (racine double) et $-2$ (racine simple) et se factorise donc ainsi $Q(X) = (X-1)^2(X+2)$.
- **Troisième étape : décomposition théorique en éléments simples.** Le théorème de décomposition en éléments simples nous dit qu'il existe une unique décomposition : $\frac{P(X)}{Q(X)} = E(X) + \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+2}$. Nous savons déjà que $E(X) = X^2+1$, il reste à trouver les nombres $a, b, c$.
- **Quatrième étape : détermination des coefficients.** Voici une première façon de déterminer $a, b, c$. On récrit la fraction $\frac{a}{(X-1)^2}+\frac{b}{X-1}+\frac{c}{X+2}$ au même dénominateur et on l'identifie avec $\frac{2X^2-5X+9}{Q(X)}$ :
$$\frac{a}{(X-1)^2}+\frac{b}{X-1}+\frac{c}{X+2} = \frac{(b+c)X^2+(a+b-2c)X+2a-2b+c}{(X-1)^2(X+2)}$$
qui doit être égale à
$$\frac{2X^2-5X+9}{(X-1)^2(X+2)}.$$
On en déduit $b+c=2$, $a+b-2c=-5$ et $2a-2b+c=9$. Cela conduit à l'unique solution $a=2$, $b=-1$, $c=3$. Donc
$$\frac{P}{Q} = \frac{X^5-2X^3+4X^2-8X+11}{X^3-3X+2} = X^2+1+\frac{2}{(X-1)^2}+\frac{-1}{X-1}+\frac{3}{X+2}.$$
Cette méthode est souvent la plus longue.
- **Quatrième étape (bis) : détermination des coefficients.** Voici une autre méthode plus efficace.
Notons $\frac{P'(X)}{Q(X)} = \frac{2X^2-5X+9}{(X-1)^2(X+2)}$ dont la décomposition théorique est : $\frac{a}{(X-1)^2}+\frac{b}{X-1}+\frac{c}{X+2}$
Pour déterminer $a$ on multiplie la fraction $\frac{P'}{Q}$ par $(X-1)^2$ et on évalue en $x=1$.
Tout d'abord en partant de la décomposition théorique on a :
$$F_1(X) = (X-1)^2\frac{P'(X)}{Q(X)} = a + b(X-1) + c\frac{(X-1)^2}{X+2} \quad \text{donc} \quad F_1(1) = a$$
D'autre part
$$F_1(X) = (X-1)^2\frac{P'(X)}{Q(X)} = (X-1)^2\frac{2X^2-5X+9}{(X-1)^2(X+2)} = \frac{2X^2-5X+9}{X+2}$$
donc $F_1(1) = 2$. On en déduit $a = 2$.
On fait le même processus pour déterminer $c$ : on multiplie par $(X+2)$ et on évalue en $-2$. On calcule $F_2(X) = (X+2)\frac{P'(X)}{Q(X)} = \frac{2X^2-5X+9}{(X-1)^2} = a\frac{X+2}{(X-1)^2} + b\frac{X+2}{X-1} + c$ de deux façons et lorsque l'on évalue $x=-2$ on obtient d'une part $F_2(-2) = c$ et d'autre part $F_2(-2) = 3$. Ainsi $c = 3$.
Comme les coefficients sont uniques tous les moyens sont bons pour les déterminer. Par exemple lorsque l'on évalue la décomposition théorique $\frac{P'(X)}{Q(X)} = \frac{a}{(X-1)^2}+\frac{b}{X-1}+\frac{c}{X+2}$ en $x=0$, on obtient :
$$\frac{P'(0)}{Q(0)} = a - b + \frac{c}{2}$$
Donc $\frac{9}{2} = a - b + \frac{c}{2}$. Donc $b = a + \frac{c}{2} - \frac{9}{2} = -1$.

## 4.2. Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

**Théorème 9** (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$)**.**
*Soit $P/Q$ une fraction rationnelle avec $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\operatorname{pgcd}(P,Q) = 1$. Alors $P/Q$ s'écrit de manière unique comme somme :*

- *d'une partie polynomiale $E(X)$,*
- *d'éléments simples du type $\frac{a}{(X-\alpha)^i}$,*
- *d'éléments simples du type $\frac{aX+b}{(X^2+\alpha X+\beta)^i}$.*

*Où les $X-\alpha$ et $X^2+\alpha X+\beta$ sont les facteurs irréductibles de $Q(X)$ et les exposants $i$ sont inférieurs ou égaux à la puissance correspondante dans cette factorisation.*

**Exemple 19.**
Décomposition en éléments simples de $\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{3X^4+5X^3+8X^2+5X+3}{(X^2+X+1)^2(X-1)}$. Comme $\deg P < \deg Q$ alors $E(X) = 0$. Le dénominateur est déjà factorisé sur $\mathbb{R}$ car $X^2+X+1$ est irréductible. La décomposition théorique est donc :
$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{aX+b}{(X^2+X+1)^2} + \frac{cX+d}{X^2+X+1} + \frac{e}{X-1}.$$
Il faut ensuite mener au mieux les calculs pour déterminer les coefficients afin d'obtenir :
$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{2X+1}{(X^2+X+1)^2} + \frac{-1}{X^2+X+1} + \frac{3}{X-1}.$$

**Mini-exercices.**

1. Soit $Q(X) = (X-2)^2(X^2-1)^3(X^2+1)^4$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ quelle est la forme théorique de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de $\frac{P}{Q}$ ? Et sur $\mathbb{R}$ ?
2. Décomposer les fractions suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ : $\frac{1}{X^2-1}$ ; $\frac{X^2+1}{(X-1)^2}$ ; $\frac{X}{X^3-1}$.
3. Décomposer les fractions suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$ : $\frac{X^2+X+1}{(X-1)(X+2)^2}$ ; $\frac{2X^2-X}{(X^2+2)^2}$ ; $\frac{X^6}{(X^2+1)^2}$.
4. Soit $F(X) = \frac{2X^2+7X-20}{X+2}$. Déterminer l'équation de l'asymptote oblique en $\pm\infty$. Étudier la position du graphe de $F$ par rapport à cette droite.

### Auteurs du chapitre

- Rédaction : Arnaud Bodin ; relecture : Stéphanie Bodin
- Basé sur des cours de Guoting Chen et Marc Bourdon