

# Polynômes

## L'anneau des polynômes

### Exercice 1 [02127] [Correction]

Résoudre les équations suivantes :

- (a)  $Q^2 = XP^2$  d'inconnues  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$   
 (b)  $P \circ P = P$  d'inconnue  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

### Exercice 2 [02674] [Correction]

Trouver les  $P \in \mathbb{R}[X]$  tels que  $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$ .

### Exercice 3 [02377] [Correction]

- (a) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , développer le polynôme

$$(1 + X)(1 + X^2)(1 + X^4) \dots (1 + X^{2^n})$$

- (b) En déduire que tout entier  $p > 0$  s'écrit de façon unique comme somme de puissance de 2 : 1, 2, 4, 8, ...

### Exercice 4 [02553] [Correction]

Soit  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite de polynômes définie par

$$P_1 = X - 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1} = P_n^2 - 2$$

Calculer le coefficient de  $X^2$  dans  $P_n$ .

## Polynômes réels

### Exercice 5 [00399] [Correction]

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Montrer qu'il y a équivalence entre :

- (i)  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$ ;  
 (ii)  $\exists (A, B) \in \mathbb{R}[X]^2, P = A^2 + B^2$ .

## Polynômes complexes

### Exercice 6 [00271] [Correction]

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  non constant et tel que  $P(0) = 1$ . Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists z \in \mathbb{C}, |z| < \varepsilon \text{ et } |P(z)| < 1$$

### Exercice 7 [03342] [Correction]

Soit  $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$ . On pose

$$M = \sup_{|z|=1} |P(z)|$$

Montrer

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, |a_k| \leq M$$

(indice : employer des racines de l'unité)

### Exercice 8 [02165] [Correction]

Soit

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$$

Montrer que si  $\xi$  est racine de  $P$  alors

$$|\xi| \leq 1 + \max_{0 \leq k \leq n-1} |a_k|$$

### Exercice 9 [03683] [Correction]

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme non constant dont les racines complexes sont de parties imaginaires positives ou nulles. Montrer que le polynôme  $P + \bar{P}$  est scindé dans  $\mathbb{R}[X]$ .

## Polynômes réels scindés

### Exercice 10 [03581] [Correction]

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  scindé de degré  $\geq 2$ ; on veut montrer que le polynôme  $P'$  est lui aussi scindé.

- (a) Énoncer le théorème de Rolle.  
 (b) Si  $x_0$  est racine de  $P$  de multiplicité  $m \geq 1$ , déterminer sa multiplicité dans  $P'$  ?

(c) Prouver le résultat énoncé.

**Exercice 11** [ 00261 ] [Correction]

- (a) Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable. On suppose que  $f$  s'annule au moins  $n$  fois. Montrer que  $f'$  s'annule au moins  $n - 1$  fois.
- (b) Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme scindé à racines simples avec  $n = \deg P \geq 2$ . Montrer que le polynôme  $P'$  est lui aussi scindé.
- (c) Montrer que le résultat perdure même si les racines de  $P$  ne sont pas simples.

**Exercice 12** [ 02160 ] [Correction]

Soit  $P$  un polynôme de degré  $n + 1 \in \mathbb{N}^*$  à coefficients réels possédant  $n + 1$  racines réelles distinctes.

- (a) Montrer que son polynôme dérivé  $P'$  possède exactement  $n$  racines réelles distinctes.
- (b) En déduire que les racines du polynôme  $P^2 + 1$  sont toutes simples dans  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 13** [ 02163 ] [Correction]

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme scindé de degré supérieur à 2. Montrer que  $P'$  est scindé.

**Exercice 14** [ 02669 ] [Correction]

- (a) Si  $P \in \mathbb{R}[X]$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ , montrer que  $P'$  est scindé ou constant sur  $\mathbb{R}$ .
- (b) Si  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , montrer que  $X^{10} + aX^9 + bX^8 + cX^7 + X + 1$  n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 15** [ 03339 ] [Correction]

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  scindé à racines simples dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  les racines de  $P^2 + \alpha^2$  dans  $\mathbb{C}$  sont toutes simples.

**Exercice 16** [ 03696 ] [Correction]

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  scindé sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que pour tout réel  $\alpha$ , le polynôme  $P' + \alpha P$  est lui aussi scindé sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 17** [ 00274 ] [Correction]

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  simplement scindé sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $P$  ne peut avoir deux coefficients consécutifs nuls.

**Exercice 18** [ 03340 ] [Correction]

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  scindé à racines simples. Montrer qu'aucun coefficient nul de  $P$  ne peut être encadré par deux coefficients non nuls et de même signe.

**Exercice 19** [ 04951 ] [Correction]

Soit  $P$  un polynôme réel unitaire de degré  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $P$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  si, et seulement si, pour tout  $z$  complexe

$$|\operatorname{Im}(z)|^n \leq |P(z)|$$

## Dérivation

**Exercice 20** [ 02129 ] [Correction]

Résoudre les équations suivantes :

- (a)  $P'^2 = 4P$  d'inconnue  $P \in \mathbb{K}[X]$
- (b)  $(X^2 + 1)P'' - 6P = 0$  d'inconnue  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

**Exercice 21** [ 02130 ] [Correction]

Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , il existe un unique polynôme  $P_n \in \mathbb{R}[X]$  tel que

$$P_n - P'_n = X^n$$

Exprimer les coefficients de  $P_n$  à l'aide de nombres factoriels.

**Exercice 22** [ 02132 ] [Correction]

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Montrer

$$P(X + 1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} P^{(n)}(X)$$

**Exercice 23** [03338] [Correction]

Trouver tous les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  tels que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \int_k^{k+1} P(t) dt = k + 1$$

**Exercice 24** [03341] [Correction]

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . On suppose que  $a \in \mathbb{R}$  vérifie

$$P(a) > 0 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, P^{(k)}(a) \geq 0$$

Montrer que le polynôme  $P$  ne possède pas de racines dans  $[a; +\infty[$ .

## Division euclidienne

**Exercice 25** [02141] [Correction]

Soit  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$  tels que  $a \neq b$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Exprimer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$  en fonction de  $P(a)$  et  $P(b)$ .

**Exercice 26** [02142] [Correction]

Soient  $a \in \mathbb{K}$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

Exprimer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)^2$  en fonction de  $P(a)$  et  $P'(a)$ .

**Exercice 27** [02143] [Correction]

Soient  $t \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Déterminer le reste de la division euclidienne dans  $\mathbb{R}[X]$  de  $(X \cos t + \sin t)^n$  par  $X^2 + 1$ .

**Exercice 28** [02144] [Correction]

Soit  $k, n \in \mathbb{N}^*$  et  $r$  le reste de la division euclidienne de  $k$  par  $n$ .

Montrer que le reste de la division euclidienne de  $X^k$  par  $X^n - 1$  est  $X^r$ .

**Exercice 29** [02145] [Correction]

Soient  $n, m \in \mathbb{N}^*$ .

(a) De la division euclidienne de  $n$  par  $m$ , déduire celle de  $X^n - 1$  par  $X^m - 1$ .

(b) Établir que

$$\text{pgcd}(X^n - 1, X^m - 1) = X^{\text{pgcd}(n, m)} - 1$$

## Divisibilité

**Exercice 30** [02133] [Correction]

Montrer les divisibilités suivantes et déterminer les quotients correspondant :

(a)  $X - 1 \mid X^3 - 2X^2 + 3X - 2$

(b)  $X - 2 \mid X^3 - 3X^2 + 3X - 2$

(c)  $X + 1 \mid X^3 + 3X^2 - 2$ .

**Exercice 31** [02140] [Correction]

En réalisant une division euclidienne, former une condition nécessaire et suffisante sur  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$  pour que  $X^2 + 2$  divise  $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ .

**Exercice 32** [02134] [Correction]

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

(a) Montrer que  $P(X) - X$  divise  $P(P(X)) - P(X)$ .

(b) En déduire que  $P(X) - X$  divise  $P(P(X)) - X$ .

(c) On note  $P^{[n]} = P \circ \dots \circ P$  (composition à  $n \geq 1$  facteurs).  
Établir que  $P(X) - X$  divise  $P^{[n]}(X) - X$

**Exercice 33** [03407] [Correction]

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Montrer que  $P(X) - X$  divise  $P(P(X)) - X$ .

## Arithmétique

**Exercice 34** [02135] [Correction]

Soit  $A, B \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $A^2 \mid B^2$ . Montrer que  $A \mid B$ .

**Exercice 35** [02137] [Correction]

Soit  $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$  non nuls. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i)  $A$  et  $B$  ne sont pas premiers entre eux.

(ii) il existe  $(U, V) \in (\mathbb{K}[X] - \{0\})^2$  tel que

$$AU + BV = 0, \deg U < \deg B \text{ et } \deg V < \deg A$$

**Exercice 36** [02138] [Correction]

Soit  $A, B \in \mathbb{K}[X]$  non nuls.

Montrer :  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux si, et seulement si,  $A + B$  et  $AB$  le sont.

**Exercice 37** [02139] [Correction]

Soient  $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $A$  et  $B$  soient premiers entre eux.

Montrer

$$\text{pgcd}(A, BC) = \text{pgcd}(A, C)$$

**Exercice 38** [02580] [Correction]

On cherche les polynômes

$$P(X) = (X - a)(X - b) \in \mathbb{C}[X]$$

tels que  $P(X)$  divise  $P(X^3)$ .

Montrer que, si  $a = b$ ,  $P \in \mathbb{R}[X]$  et que si  $a \neq b$  et  $a^3 \neq b^3$ , il existe 6 polynômes dont 4 dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Trouver les polynômes  $P$  si  $a \neq b$  et  $a^3 = b^3$  et en déduire que 13 polynômes en tout conviennent, dont 7 dans  $\mathbb{R}[X]$ .

## Racines

**Exercice 39** [02157] [Correction]

(a) Soit

$$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

un polynôme à coefficients entiers tel que  $a_n \neq 0$  et  $a_0 \neq 0$ .

On suppose que  $P$  admet une racine rationnelle  $r = p/q$  exprimée sous forme irréductible.

Montrer que  $p \mid a_0$  et  $q \mid a_n$ .

(b) Factoriser

$$P = 2X^3 - X^2 - 13X + 5$$

(c) Le polynôme

$$P = X^3 + 3X - 1$$

est-il irréductible dans  $\mathbb{Q}[X]$ ?

**Exercice 40** [02158] [Correction]

Soient  $a, b, c$  trois éléments, non nuls et distincts, du corps  $\mathbb{K}$ .

Démontrer que le polynôme

$$P = \frac{X(X-b)(X-c)}{a(a-b)(a-c)} + \frac{X(X-c)(X-a)}{b(b-c)(b-a)} + \frac{X(X-a)(X-b)}{c(c-a)(c-b)}$$

peut s'écrire sous la forme  $P = \lambda(X-a)(X-b)(X-c) + 1$  où  $\lambda$  est une constante que l'on déterminera.

**Exercice 41** [02371] [Correction]

(a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Exprimer  $\sin((2n+1)\alpha)$  en fonction de  $\sin \alpha$  et  $\cos \alpha$ .

(b) En déduire que les racines du polynôme :

$$P(X) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} X^{n-p}$$

sont de la forme  $x_k = \cot^2 \beta_k$ . Déterminer les  $\beta_k$ .

**Exercice 42** [02663] [Correction]

(a) Montrer que  $a = \cos(\pi/9)$  est racine d'un polynôme de degré trois à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ .

(b) Justifier que le nombre  $a$  est irrationnel.

**Exercice 43** [01352] [Correction]

Soient  $\mathbb{K}$  un corps et  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$  deux à deux distincts.

(a) Calculer

$$\sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

(b) On pose  $A(X) = \prod_{j=1}^n (X - a_j)$ . Calculer

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{A'(a_i)}$$

## Racines et arithmétique

### Exercice 44 [02166] [Correction]

Soient  $p$  et  $q$  deux entiers supérieurs à 2 et premiers entre eux. Montrer

$$(X^p - 1)(X^q - 1) \mid (X - 1)(X^{pq} - 1)$$

### Exercice 45 [02167] [Correction]

Justifier les divisibilités suivantes :

$$(a) \forall n \in \mathbb{N}, X^2 \mid (X + 1)^n - nX - 1$$

$$(b) \forall n \in \mathbb{N}^*, (X - 1)^3 \mid nX^{n+2} - (n + 2).X^{n+1} + (n + 2)X - n$$

### Exercice 46 [02169] [Correction]

Justifier

$$\forall (n, p, q) \in \mathbb{N}^3, 1 + X + X^2 \mid X^{3n} + X^{3p+1} + X^{3q+2}$$

### Exercice 47 [02170] [Correction]

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $n \in \mathbb{N}$  pour que

$$X^2 + X + 1 \mid X^{2n} + X^n + 1$$

### Exercice 48 [02668] [Correction]

Déterminer les  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$  tels que

$$(X + 4)P(X) = XP(X + 1)$$

### Exercice 49 [03041] [Correction]

Trouver les  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que

$$P(1) = 1, P(2) = 2, P'(1) = 3, P'(2) = 4, P''(1) = 5 \text{ et } P''(2) = 6$$

### Exercice 50 [03406] [Correction]

(Équation de Fermat polynomiale)

- (a) Soient  $P, Q, R \in \mathbb{C}[X]$  premiers entre eux deux à deux, non constants, et tels que

$$P + Q + R = 0$$

Soient  $p, q, r$  le nombre de racines distinctes des polynômes  $P, Q, R$  respectivement.

Prouver que le degré de  $P$  est strictement inférieur à  $p + q + r$ . (indice : introduite  $P'Q - Q'P$ )

- (b) Trouver tous les triplets de polynômes complexes  $(P, Q, R)$  tels que

$$P^n + Q^n = R^n$$

pour  $n \geq 3$  donné.

- (c) Le résultat s'étend-il à  $n = 2$  ?

### Exercice 51 [02361] [Correction]

Soit  $P \in \mathbb{Z}[X]$  et  $a, b$  deux entiers relatifs avec  $b > 0$  et  $\sqrt{b}$  irrationnel.

- (a) Exemple : montrer que  $\sqrt{6}$  est irrationnel.

- (b) Quelle est la forme de  $(a + \sqrt{b})^n$  ?

- (c) Montrer que si  $a + \sqrt{b}$  est racine de  $P$  alors  $a - \sqrt{b}$  aussi.

- (d) On suppose que  $a + \sqrt{b}$  est racine double de  $P$ . Montrer que  $P = RQ^2$  avec  $R$  et  $Q$  dans  $\mathbb{Z}[X]$ .

## Racines et équations polynomiales

### Exercice 52 [02159] [Correction]

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme non nul tel que

$$P(X^2) + P(X)P(X + 1) = 0$$

- (a) Montrer que si  $a$  est racine de  $P$  alors  $a^2$  l'est aussi

- (b) En déduire que  $a = 0$  ou bien  $a$  est racine de l'unité.

### Exercice 53 [02164] [Correction]

Montrer que si  $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$  vérifie

$$P(X^2) = P(X)P(X + 1)$$

ses racines sont parmi  $0, 1, -j, -j^2$ . En déduire tous les polynômes solutions.

**Exercice 54** [02375] [Correction]

Trouver les  $P \in \mathbb{C}[X]$  vérifiant

$$P(X^2) = P(X)P(X+1)$$

**Exercice 55** [02673] [Correction]

On cherche les polynômes  $P$  non nuls tels que

$$P(X^2) = P(X-1)P(X)$$

- (a) Montrer que toute racine d'un tel  $P$  est de module 1.  
 (b) Déterminer les polynômes  $P$ .

**Exercice 56** [02672] [Correction]

Déterminer les polynômes  $P$  de  $\mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$  vérifiant

$$P(X^2) = P(X-1)P(X)$$

**Exercice 57** [01329] [Correction]

Trouver les  $P \in \mathbb{C}[X]$  vérifiant

$$P(X^2) = P(X)P(X-1)$$

## Factorisation

**Exercice 58** [02171] [Correction]

Factoriser dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$  les polynômes suivants :

- (a)  $X^4 - 1$                       (b)  $X^5 - 1$                       (c)  $(X^2 - X + 1)^2 + 1$ .

**Exercice 59** [02172] [Correction]

Factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  les polynômes suivants :

- (a)  $X^4 + X^2 + 1$                       (b)  $X^4 + X^2 - 6$                       (c)  $X^8 + X^4 + 1$

**Exercice 60** [02173] [Correction]

Factoriser le polynôme  $(X+i)^n - (X-i)^n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 61** [02174] [Correction]

Former la décomposition primaire dans  $\mathbb{R}[X]$  de  $P = X^{2n+1} - 1$  (avec  $n \in \mathbb{N}$ ).

**Exercice 62** [02175] [Correction]

Soient  $a \in ]0; \pi[$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Factoriser dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme

$$X^{2n} - 2 \cos(na)X^n + 1$$

## Relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé

**Exercice 63** [02176] [Correction]

Trouver les racines dans  $\mathbb{C}$  du polynôme  $X^4 + 12X - 5$  sachant qu'il possède deux racines dont la somme est 2.

**Exercice 64** [02177] [Correction]

Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\lambda \in \mathbb{C}$  pour que  $X^3 - 7X + \lambda$  admette une racine qui soit le double d'une autre. Résoudre alors l'équation.

**Exercice 65** [02178] [Correction]

Résoudre  $x^3 - 8x^2 + 23x - 28 = 0$  sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième.

**Exercice 66** [02179] [Correction]

On considère l'équation :  $x^3 - (2 + \sqrt{2})x^2 + 2(\sqrt{2} + 1)x - 2\sqrt{2} = 0$  de racines  $x_1, x_2$  et  $x_3$ .

- (a) Former une équation dont  $x_1^2, x_2^2$  et  $x_3^2$  seraient racines.  
 (b) En déduire les valeurs de  $x_1, x_2, x_3$ .

**Exercice 67** [02180] [Correction]

Déterminer les triplets  $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$  tels que :

$$(a) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 1/x + 1/y + 1/z = 1 \\ xyz = -4 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x(y+z) = 1 \\ y(z+x) = 1 \\ z(x+y) = 1 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 20 \end{cases}$$

**Exercice 68** [02181] [Correction]

Soient  $x, y, z \in \mathbb{C}^*$  tels que  $x + y + z = 0$ . Montrer

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)^2$$

**Exercice 69** [02182] [Correction]

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose  $P_n = \sum_{k=0}^n X^k$ .

- (a) Former la décomposition en facteurs premiers de  $P_n$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .
- (b) En déduire la valeur de  $\prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n+1}$ .

**Exercice 70** [02184] [Correction]

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  non nul et  $n = \deg P$ .

Montrer que les sommes des zéros de  $P, P', \dots, P^{(n-1)}$  sont en progression arithmétique.

**Exercice 71** [02373] [Correction]

Soit  $P = X^3 + aX^2 + bX + c$  un polynôme complexe de racines  $\alpha, \beta, \gamma$ . Calculer

$$\frac{\alpha}{\beta + \gamma} + \frac{\beta}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta}$$

**Exercice 72** [03336] [Correction]

Résoudre dans  $\mathbb{C}^3$  le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 0 \\ x^5 + y^5 + z^5 = 0 \end{cases}$$

**Exercice 73** [03345] [Correction]

On considère le polynôme

$$P(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{C}[X]$$

de racines  $x_1, \dots, x_n$  comptées avec multiplicité.

Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on pose

$$S_p = x_1^p + \dots + x_n^p$$

Établir

$$\begin{cases} a_0S_1 + a_1 = 0 \\ a_0S_2 + a_1S_1 + 2a_2 = 0 \\ \dots \\ a_0S_p + a_1S_{p-1} + \dots + a_{p-1}S_1 + pa_p = 0 \quad (0 < p \leq n) \\ \dots \\ a_0S_n + a_1S_{n-1} + \dots + a_nS_1 = 0 \\ \dots \\ a_0S_{n+k} + a_1S_{n+k-1} + \dots + a_nS_k = 0 \quad (k > 0) \end{cases}$$

**Exercice 74** [03812] [Correction]

- (a) Déterminer trois éléments  $a, b, c$  de  $\mathbb{C}$ , non tous réels, tels que  $a + b + c, a^2 + b^2 + c^2$  et  $a^3 + b^3 + c^3$  soient trois réels.
- (b) Montrer que, si  $a, b, c$  sont trois éléments de  $\mathbb{C}$  de modules différents et si  $a + b + c \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 + c^2 \in \mathbb{R}$  et  $a^3 + b^3 + c^3 \in \mathbb{R}$ , alors  $a, b$  et  $c$  sont trois réels. Énoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

## Familles de polynômes classiques

**Exercice 75** [02185] [Correction]

(Polynômes de Tchebychev (1821-1894)) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On pose  $f_n: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par

$$f_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

- (a) Calculer  $f_0, f_1, f_2$  et  $f_3$ .
- (b) Exprimer  $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x)$  en fonction de  $f_n(x)$ .
- (c) Établir qu'il existe un unique polynôme  $T_n$  de  $\mathbb{R}[X]$  dont la fonction polynomiale associée coïncide avec  $f_n$  sur  $[-1; 1]$ .
- (d) Donner le degré de  $T_n$  ainsi que son coefficient dominant.
- (e) Observer que  $T_n$  possède exactement  $n$  racines distinctes, que l'on exprimera, toutes dans  $] -1; 1[$ .

**Exercice 76** [02186] [Correction]

(Polynômes d'interpolation de Lagrange (1736-1813)) Soit  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  une famille d'éléments de  $\mathbb{K}$  deux à deux distincts.

Pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  on pose

$$L_i = \frac{\prod_{0 \leq j \leq n, j \neq i} (X - a_j)}{\prod_{0 \leq j \leq n, j \neq i} (a_i - a_j)}$$

- (a) Observer que, pour tout  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ , on a  $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$  (où  $\delta_{i,j}$  est le symbole de Kronecker (1823-1891) qui est égal à 1 lorsque  $i = j$  et 0 sinon).
- (b) Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], P(X) = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i(X)$$

**Exercice 77** [02188] [Correction]

Soit  $(P_n)_{n \geq 0}$  la suite de  $\mathbb{K}[X]$  définie par

$$P_0 = 0, P_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = X P_{n+1} - P_n$$

- (a) Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}^2 = 1 + P_n P_{n+2}$$

- (b) En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n \text{ et } P_{n+1} \text{ sont premiers entre eux}$$

- (c) Établir pour que pour tout  $m \in \mathbb{N}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a

$$P_{m+n} = P_n P_{m+1} - P_{n-1} P_m$$

- (d) Montrer que pour tout  $m \in \mathbb{N}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a

$$\text{pgcd}(P_{m+n}, P_n) = \text{pgcd}(P_n, P_m)$$

En déduire que  $\text{pgcd}(P_m, P_n) = \text{pgcd}(P_n, P_r)$  où  $r$  est le reste de la division euclidienne de  $m$  par  $n$ .

- (e) Conclure

$$\text{pgcd}(P_n, P_m) = P_{\text{pgcd}(m,n)}$$

**Exercice 78** [02189] [Correction]

(Polynômes de Laguerre (1834-1886)) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $L_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$$

Observer que  $L_n$  est une fonction polynomiale dont on déterminera le degré et le coefficient dominant.

**Exercice 79** [02670] [Correction]

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $P(\cos \theta) = \cos n\theta$  pour tout  $\theta$  réel. On le note  $T_n$ .

- (a) Lier  $T_{n-1}, T_n$  et  $T_{n+1}$ .
- (b) Donner une équation différentielle vérifiée par  $T_n$ .
- (c) Calculer  $T_n^{(k)}(1)$  et  $T_n^{(k)}(-1)$ .

**Exercice 80** [02671] [Correction]

Quels sont les couples  $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$  vérifiant  $P^2 + (1 - X^2)Q^2 = 1$  ?

**Exercice 81** [02128] [Correction]

On définit une suite de polynôme  $(P_n)$  par

$$P_0 = 2, P_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = X P_{n+1} - P_n$$

- (a) Calculer  $P_2$  et  $P_3$ .  
Déterminer degré et coefficient dominant de  $P_n$ .
- (b) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$  on a

$$P_n(z + 1/z) = z^n + 1/z^n$$

- (c) En déduire une expression simple de  $P_n(2 \cos \theta)$  pour  $\theta \in \mathbb{R}$ .
- (d) Déterminer les racines de  $P_n$ .

**Exercice 82** [03269] [Correction]

On pose

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

Démontrer l'existence d'un polynôme  $P_n$  de degré  $n$  et à coefficients positifs ou nul vérifiant

$$\forall n \geq 1, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$$

Préciser  $P_1, P_2, P_3$  et calculer  $P_n(1)$ .

## Corrections

### Exercice 1 : [énoncé]

- (a) Si  $(P, Q)$  est un couple solution de polynômes non nuls alors  $Q^2 = XP^2$  donne  $2 \deg Q = 1 + 2 \deg P$  avec  $\deg P, \deg Q \in \mathbb{N}$  ce qui est impossible. Il reste le cas où l'un des polynômes  $P$  ou  $Q$  est nul et l'autre, alors, l'est aussi. Inversement, le couple nul est effectivement solution.
- (b) Si  $\deg P \geq 2$  alors  $\deg P \circ P = (\deg P)^2 > \deg P$  et donc  $P$  n'est pas solution. Si  $\deg P \leq 1$  alors on peut écrire  $P = aX + b$  et alors

$$P \circ P = P \iff a(aX + b) + b = aX + b \iff \begin{cases} a^2 = a \\ ab = 0 \end{cases}$$

Après résolution on obtient

$$(a = 1 \text{ et } b = 0) \text{ ou } (a = 0 \text{ et } b \text{ quelconque})$$

Finalement les solutions sont le polynôme  $X$  et les polynômes constants.

### Exercice 2 : [énoncé]

Parmi les polynômes constants, seuls le polynôme nul est solution. Si  $\deg P \geq 1$  alors, pour vérifier l'équation, il est nécessaire que  $\deg P = 2$ . On peut alors écrire  $P$  sous la forme  $aX^2 + bX + c$ . Parmi, les polynômes de cette forme, ceux solutions sont ceux obtenus pour  $b = 0$  et  $c = -a$ . Conclusion, les polynômes solutions sont les  $a(X^2 - 1)$  avec  $a \in \mathbb{R}$ .

### Exercice 3 : [énoncé]

- (a) Posons

$$P(X) = (1 + X)(1 + X^2)(1 + X^4) \dots (1 + X^{2^n})$$

En exploitant successivement  $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ , on obtient

$$(1 - X)P(X) = 1 - X^{2^{n+1}}$$

On en déduit

$$P(X) = \frac{1 - X^{2^{n+1}}}{1 - X} = 1 + X + X^2 + \dots + X^{2^{n+1}-1}$$

- (b) Lorsqu'on développe directement le polynôme  $P$ , le coefficient de  $X^k$  obtenu correspond au nombre de fois qu'il est possible d'écrire  $k$  comme la somme des puissances de 2 suivantes :  $1, 2, 4, \dots, 2^n$ . Ce nombre vaut 1 compte tenu de l'exercice précédent.

### Exercice 4 : [énoncé]

Notons  $a_n, b_n$  et  $c_n$  les coefficients de  $1, X$  et  $X^2$  dans  $P_n$ .

Puisque  $P_1 = X - 2$ , on a  $a_1 = -2, b_1 = 1$  et  $c_1 = 0$ .

Puisque  $P_{n+1} = P_n^2 - 2$ , on a  $a_{n+1} = a_n^2 - 2, b_{n+1} = 2a_nb_n$  et  $c_{n+1} = b_n^2 + 2a_nc_n$ . On en déduit  $a_2 = 2, b_2 = -4$  et  $c_2 = 1$  puis pour  $n \geq 3$  :  $a_n = 2, b_n = -4^{n-1}$ ,

$$c_n = 4^{n-2} + 4^{n-1} + \dots + 4^{2n-4} = 4^{n-2} \frac{4^{n-1} - 1}{3}$$

### Exercice 5 : [énoncé]

L'implication (ii)  $\implies$  (i) est immédiate.

Supposons (i).

Puisque  $P$  est de signe constant, la décomposition en facteurs irréductibles de  $P$  s'écrit avec des facteurs de la forme

$$(X - \lambda)^2 = (X - \lambda)^2 + 0^2$$

et

$$X^2 + 2pX + q = (X + p)^2 + (\sqrt{q - p^2})^2$$

Ainsi  $P$  est, à un facteur multiplicatif positif près, le produit de polynômes s'écrivant comme la somme des carrés de deux polynômes réels.

Or

$$(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC - BD)^2 + (AD + BC)^2$$

donc  $P$  peut s'écrire comme la somme des carrés de deux polynômes réels

### Exercice 6 : [énoncé]

Puisque le polynôme  $P$  est non constant, on peut écrire

$$P(z) = 1 + a_q z^q + z^{q+1} Q(z)$$

avec  $a_q \neq 0$  et  $Q \in \mathbb{C}[X]$ .

Posons  $\theta$  un argument du complexe  $a_q$  et considérons la suite  $(z_n)$  de terme général

$$z_n = \frac{1}{n} e^{i(\pi - \theta)/q}$$

On a  $z_n \rightarrow 0$  et

$$P(z_n) = 1 - \frac{|a_q|}{n^q} + o\left(\frac{1}{n^q}\right)$$

donc  $|P(z_n)| < 1$  pour  $n$  assez grand.

**Exercice 7 :** [énoncé]

Soit  $\omega = e^{2i\pi/(n+1)}$  une racine  $(n+1)$ -ième de l'unité. On a

$$P(1) + P(\omega) + \dots + P(\omega^n) = (n+1)a_0$$

car

$$\sum_{k=0}^n \omega^{k\ell} = \begin{cases} n+1 & \text{si } \ell = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad [n+1]$$

On en déduit  $(n+1)|a_0| \leq (n+1)M$  puis  $|a_0| \leq M$ .

De façon plus générale, on a

$$P(1) + \omega^{-k}P(\omega) + \dots + \omega^{-nk}P(\omega^n) = (n+1)a_k$$

et on en déduit  $|a_k| \leq M$ .

**Exercice 8 :** [énoncé]

La propriété est immédiate si  $|\xi| \leq 1$ . On suppose désormais  $|\xi| > 1$  et on note

$$m = \max_{0 \leq k \leq n-1} |a_k|$$

L'égalité

$$-\xi^n = a_{n-1}\xi^{n-1} + \dots + a_1\xi + a_0$$

donne

$$|\xi|^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |\xi|^k \leq m \sum_{k=0}^{n-1} |\xi|^k$$

donc

$$|\xi|^n \leq m \frac{|\xi|^n - 1}{|\xi| - 1} \leq m \frac{|\xi|^n}{|\xi| - 1}$$

puis

$$|\xi| \leq 1 + m$$

**Exercice 9 :** [énoncé]

On peut écrire  $P$  sous forme factorisée

$$P(X) = \lambda \prod_{k=1}^n (X - z_k)$$

avec  $n = \deg P \in \mathbb{N}^*$  et  $z_k \in \mathbb{C}$  vérifiant  $\operatorname{Im} z_k \geq 0$ .

Un complexe  $z$  est racine du polynôme  $P + \bar{P}$  si, et seulement si,

$$\lambda \prod_{k=1}^n (z - z_k) = -\bar{\lambda} \prod_{k=1}^n (z - \bar{z}_k)$$

Si  $\operatorname{Im} z > 0$  alors

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, |z - z_k| < |z - \bar{z}_k|$$

et donc

$$\left| \lambda \prod_{k=1}^n (z - z_k) \right| < \left| \bar{\lambda} \prod_{k=1}^n (z - \bar{z}_k) \right|$$

Ainsi  $z$  ne peut être racine de  $P + \bar{P}$  et  $\bar{z}$  non plus par le même raisonnement ou parce que  $P + \bar{P}$  est un polynôme réel.

On en déduit que les racines de  $P$  sont toutes réelles et donc  $P$  est scindé dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Ainsi le polynôme  $\operatorname{Re} P$  est scindé dans  $\mathbb{R}[X]$  et, par une argumentation analogue, il en est de même de  $\operatorname{Im} P$ .

**Exercice 10 :** [énoncé]

- Si  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  (avec  $a < b$ ) est continue, dérivable sur  $]a; b[$  et si  $f(a) = f(b)$  alors il existe  $c \in ]a; b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .
- Si  $x_0$  est racine de multiplicité  $m$  de  $P$  alors  $x_0$  est racine de multiplicité  $m-1$  de  $P'$  (en convenant qu'une racine de multiplicité 0 n'est en fait pas racine).
- Notons  $x_1 < \dots < x_p$  les racines de  $P$  et  $m_1, \dots, m_p$  leurs multiplicités respectives. Puisque le polynôme  $P$  est supposé scindé, on a

$$m_1 + \dots + m_p = \deg P$$

Les éléments  $x_1, \dots, x_p$  sont racines de multiplicités  $m_1 - 1, \dots, m_p - 1$  de  $P'$ . En appliquant le théorème de Rolle à  $P$  entre  $x_k$  et  $x_{k+1}$ , on détermine  $y_k \in ]x_k; x_{k+1}[$  racine de  $P'$ . Ces  $y_k$  sont distincts entre eux et distincts des  $x_1, \dots, x_p$ . On a ainsi obtenu au moins

$$(p-1) + (m_1 - 1) + \dots + (m_p - 1) = \deg P - 1$$

racines de  $P'$ . Or  $\deg P' = \deg P - 1$  donc  $P'$  est scindé.

**Exercice 11 : [énoncé]**

- (a) Soient  $a_1 < \dots < a_n$  les zéros de  $f$ . En appliquant le théorème Rolle sur chaque intervalle  $[a_i; a_{i+1}]$ , on obtient  $b_i \in ]a_i; a_{i+1}[$  annulant  $f'$ . Puisque

$$a_1 < b_1 < a_2 < \dots < b_{n-1} < a_n$$

les  $b_1, \dots, b_{n-1}$  sont des annulations distinctes de  $f'$ .

- (b) Si  $P$  est scindé à racines simples, il possède  $n$  racines. Le polynôme  $P'$  possède alors au moins  $n - 1$  racines. Or  $\deg P' = n - 1$  donc le polynôme  $P'$  est scindé.
- (c) Soient  $a_1 < \dots < a_p$  les racines de  $P$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  leurs multiplicités avec

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_p = n$$

Les  $a_1 < \dots < a_p$  sont racines de  $P'$  de multiplicités respectives

$$\alpha_1 - 1, \dots, \alpha_p - 1$$

Comme ci-dessus, par Rolle, on peut aussi assurer l'existence de  $p - 1$  autres racines à  $P'$ .

La somme des multiplicités des racines est donc au moins égales à

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i - 1 + p - 1 = n - 1 = \deg P'$$

et donc le polynôme  $P'$  est scindé.

**Exercice 12 : [énoncé]**

- (a) Notons  $a_0 < a_1 < \dots < a_n$  les racines de  $P$ . En appliquant le théorème de Rolle à la fonction  $x \mapsto P(x)$  sur l'intervalle  $[a_{i-1}; a_i]$ , on justifie l'existence d'un réel  $b_i \in ]a_{i-1}; a_i[$  tels que  $P'(b_i) = 0$ . Puisque

$$a_0 < b_1 < a_1 < b_2 < \dots < b_n < a_n$$

les réels  $b_1, \dots, b_n$  sont deux à deux distincts ce qui fournit  $n$  racines réelles au polynôme  $P'$ .

Puisque  $\deg P' = \deg P - 1 = n$ , il ne peut y en avoir d'autres.

- (b) Une racine multiple de  $P^2 + 1$  est aussi racine du polynôme dérivé

$$(P^2 + 1)' = 2PP'$$

Or les racines de  $P$  ne sont pas racines de  $P^2 + 1$  et les racines de  $P'$  sont réelles et ne peuvent donc être racines de  $P^2 + 1$ . Par suite  $P^2 + 1$  et  $(P^2 + 1)'$  n'ont aucunes racines communes : les racines de  $P^2 + 1$  sont simples.

**Exercice 13 : [énoncé]**

Posons  $n = \deg P \geq 2$ ,  $a_1 < a_2 < \dots < a_p$  les racines réelles distinctes de  $P$  et  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  leurs ordres respectifs. On a  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = n$  car  $P$  est supposé scindé.

En appliquant le théorème de Rolle à  $x \mapsto \tilde{P}(x)$  sur chaque  $[a_i; a_{i+1}]$  on justifie l'existence de racines distinctes  $b_1, b_2, \dots, b_{p-1}$  disposée de sorte que

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < b_{p-1} < a_p.$$

Comme les  $a_1, a_2, \dots, a_p$  sont des racines d'ordres  $\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, \dots, \alpha_p - 1$  de  $P'$  et que  $b_1, b_2, \dots, b_{p-1}$  sont des racines au moins simples de  $P'$ , on vient de déterminer  $(n - 1) = \deg P'$  racines de  $P'$  comptées avec leur multiplicité. Finalement  $P'$  est scindé.

**Exercice 14 : [énoncé]**

- (a) Si  $P$  est de degré 1 alors  $P'$  est constant. Si  $P$  est de degré  $n \geq 2$ , par application du théorème de Rolle, il figure une racine de  $P'$  entre deux racines consécutives de  $P$ . De surcroît, si  $a$  est racine de multiplicité  $\alpha \in \mathbb{N}^*$  de  $P$ ,  $a$  est aussi racine de multiplicité  $\alpha - 1$  de  $P'$ . Par suite,  $P'$  en admet  $n - 1$  racines comptées avec multiplicité et est donc scindé.
- (b) 0 est racine multiple du polynôme dérivé à l'ordre 2. Si le polynôme était scindé, l'étude qui précède permet d'observer que 0 est racine du polynôme. Ce n'est pas le cas.

**Exercice 15 : [énoncé]**

Notons que par application du théorème de Rolle, les racines de  $P'$  sont réelles (et simples)

Les racines multiples de  $P^2 + \alpha^2$  sont aussi racines de  $(P^2 + \alpha^2)' = 2PP'$ .

Or les racines de  $P^2 + \alpha^2$  ne peuvent être réelles et les racines de  $PP'$  sont toutes réelles.

Il n'y a donc pas de racines multiples au polynôme  $P^2 + \alpha^2$ .

**Exercice 16 : [énoncé]**

Rappelons qu'un polynôme est scindé sur un corps si, et seulement si, la somme des multiplicités des racines de ce polynôme sur ce corps égale son degré.

Notons  $a_0 < a_1 < \dots < a_m$  les racines réelles de  $P$  et  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$  leurs multiplicités respectives. Le polynôme  $P$  étant scindé, on peut écrire

$$\deg P = \sum_{k=0}^m \alpha_k$$

On convient de dire qu'une racine de multiplicité 0 n'est en fait pas racine d'un polynôme. Avec ses termes, si  $a_k$  est racine de multiplicité  $\alpha_k \geq 1$  de  $P$  alors  $a_k$  est racine de multiplicité  $\alpha_k - 1$  du polynôme  $P'$  et donc racine de multiplicité au moins (et même exactement)  $\alpha_k - 1$  du polynôme  $P' + \alpha P$ . Ainsi les  $a_k$  fournissent

$$\sum_{k=0}^m (\alpha_k - 1) = \deg P - (m + 1)$$

racines comptées avec multiplicité au polynôme  $P' + \alpha P$ .

Considérons ensuite la fonction réelle  $f: x \mapsto P(x)e^{\alpha x}$ .

Cette fonction est indéfiniment dérivable et prend la valeur 0 en chaque  $a_k$ .

En appliquant le théorème de Rolle à celle-ci sur chaque intervalle  $[a_{k-1}; a_k]$ , on produit des réels  $b_k \in ]a_{k-1}; a_k[$  vérifiant  $f'(b_k) = 0$ . Or

$$f'(x) = (P'(x) + \alpha P(x)) e^{\alpha x}$$

et donc  $b_k$  est racine du polynôme  $P' + \alpha P$ .

Ajoutons à cela que les  $b_k$  sont deux à deux distincts et différents des précédents  $a_k$  car, par construction

$$a_0 < b_1 < a_1 < b_2 < \dots < b_m < a_m$$

On vient donc de déterminer  $m$  nouvelles racines au polynôme  $P' + \alpha P$  et ce dernier possède donc au moins

$$\deg P - 1$$

racines comptées avec multiplicité.

Dans le cas  $\alpha = 0$ , cela suffit pour conclure car  $\deg P' = \deg P - 1$ .

Dans le cas  $\alpha \neq 0$ , il nous faut encore une racine. . .

Si  $\alpha > 0$ , la fonction  $f$  tend vers 0 en  $-\infty$  par argument de croissance comparée.

On peut alors appliquer un théorème de Rolle généralisé à la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]-\infty; a_0]$  et cela fournit la racine manquante.

Si  $\alpha < 0$ , on exploite comme au dessus la nullité de la limite de  $f$  en  $+\infty$  cette fois pour trouver une racine dans l'intervalle  $]a_m; +\infty[$ .

### Exercice 17 : [énoncé]

Remarquons que puisque  $P$  est simplement scindé sur  $\mathbb{R}$ , l'application du théorème de Rolle entre deux racines consécutives de  $P$  donne une annulation de  $P'$  et permet de justifier que  $P'$  est simplement scindé sur  $\mathbb{R}$ . Il est en de même de  $P'', P''', \dots$

Or, si le polynôme  $P$  admet deux coefficients consécutifs nuls alors l'un de ses polynômes dérivées admet 0 pour racine double. C'est impossible en vertu de la remarque qui précède.

### Exercice 18 : [énoncé]

Écrivons

$$P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$$

et, quitte à considérer  $-P$ , supposons par l'absurde qu'il existe  $p \geq 1$  tel que

$$a_p = 0 \text{ avec } a_{p-1}, a_{p+1} > 0$$

Considérons alors

$$Q(X) = P^{(p-1)}(X) = (p-1)!a_{p-1} + \frac{(p+1)!}{2}a_{p+1}X^2 + \dots$$

Puisque le polynôme  $P$  est scindé à racines simples, par application du théorème de Rolle, les racines  $P^{(k+1)}$  sont séparées par les racines des  $P^{(k)}$ . En particulier les racines de  $Q'$  sont séparées par les racines de  $Q$ .

Or 0 est minimum local de  $Q$  avec  $Q(0) > 0$ .

Si le polynôme  $Q$  admet des racines strictement positives et si  $a$  est la plus petite de celles-ci alors  $Q'$  admet une racine dans  $]0; a[$  par application du théorème des valeurs intermédiaires et du théorème de Rolle. Or 0 est aussi racine de  $Q'$  et donc les racines de  $Q'$  ne sont pas séparées par les racines de  $Q$ . C'est absurde.

Il en est de même si la polynôme admet des racines strictement négatives.

### Exercice 19 : [énoncé]

( $\implies$ ) Supposons  $P$  scindé sur  $\mathbb{R}$ . Celui-ci possède exactement  $n$  racines réelles comptées avec multiplicité  $a_1, \dots, a_n$ . Sachant que le polynôme est unitaire, on peut écrire

$$P = (X - a_1) \dots (X - a_n)$$

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on a alors

$$|P(z)| = \prod_{k=1}^n |z - a_k| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$$

car

$$|z - a_k| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z) - a_k)^2 + (\operatorname{Im}(z))^2} \geq |\operatorname{Im}(z)|$$

( $\impliedby$ ) Supposons  $|\operatorname{Im}(z)|^n \leq |P(z)|$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ . On sait que le polynôme  $P$  est assurément scindé sur  $\mathbb{C}$ . Or, si  $z$  est une racine de  $P$ , la propriété précédente donne  $|\operatorname{Im}(z)|^n \leq 0$  et donc  $z \in \mathbb{R}$ . Ainsi, les racines de  $P$  sont toutes réelles et le polynôme  $P$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 20 :** [énoncé]

(a) Parmi les polynômes constants, seul le polynôme nul est solution.

Parmi les polynômes non constants, si  $P$  est solution alors  
 $2(\deg P - 1) = \deg P$  et donc  $\deg P = 2$ . On peut alors écrire  
 $P = aX^2 + bX + c$  avec  $a \neq 0$ .

$$P'^2 = 4P \iff 4a^2X^2 + 4abX + b^2 = 4aX^2 + 4bX + 4c \iff \begin{cases} a = 1 \\ c = b^2/4 \end{cases}$$

Les solutions de l'équation sont  $P = 0$  et  $P = X^2 + bX + b^2/4$  avec  $b \in \mathbb{K}$ .

(b) Parmi les polynôme de degré inférieur à 1, seul le polynôme nul est solution.

Pour  $P$  polynôme tel que  $\deg P \geq 2$  alors la relation  $(X^2 + 1)P'' - 6P = 0$  implique, en raisonnant sur l'annulation des coefficients dominants,  
 $\deg P(\deg P - 1) = 6$  donc  $\deg P = 3$ .

En cherchant  $P$  sous la forme  $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$  avec  $a \in \mathbb{K}^*$ , on obtient que seuls les polynômes  $P = a(X^3 + X)$  avec  $a \in \mathbb{K}^*$  sont solutions.  
 Finalement les polynômes solutions sont les  $a(X^3 + X)$  avec  $a \in \mathbb{K}$ .

**Exercice 21 :** [énoncé]

Les polynômes solutions de  $P_n - P'_n = X^n$  sont nécessairement de degré  $n$ .  
 Cherchons ceux-ci de la forme :

$$P_n = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$$

$P_n - P'_n = X^n$  équivaut à

$$a_n = 1, a_{n-1} = na_n, a_{n-2} = (n-1)a_{n-1}, \dots, a_0 = 1.a_1$$

Par suite l'équation  $P_n - P'_n = X^n$  possède une et une seule solution qui est :

$$P = X^n + nX^{n-1} + n(n-1)X^{n-2} + \dots + n! = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} X^k$$

**Exercice 22 :** [énoncé]

Par la formule de Taylor

$$P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(0)}{n!} X^n$$

donc

$$P(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(0)}{n!}$$

et plus généralement

$$P^{(k)}(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n+k)}(0)}{n!}$$

Par la formule de Taylor

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(1)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{P^{(n+k)}(0)}{n!} X^k$$

puis en permutant les sommes (qui se limitent à un nombre fini de termes non nuls)

$$P(X+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{P^{(n+k)}(0)}{n!} X^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} P^{(n)}(X)$$

Autre méthode : On exploite les ingrédients suivants :

- l'application qui à  $P$  associe  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} P^{(n)}(X)$  est linéaire ;
- par la formule du binôme, cette application envoie chaque  $X^k$  sur  $(X+1)^k$  ;
- deux applications linéaires égales sur une base sont égales sur l'espace.

**Exercice 23 :** [énoncé]

Soit  $P$  un polynôme et  $Q$  un polynôme primitif de  $P$ .  $P$  est solution du problème posé si, et seulement si,

$$\forall k \in \mathbb{Z}, Q(k+1) - Q(k) = k+1$$

En raisonnant par coefficients inconnus, on observe que  $Q(X) = \frac{1}{2}X(X+1)$  est solution.

Si  $\tilde{Q}(X)$  est aussi solution alors

$$\forall k \in \mathbb{Z}, (Q - \tilde{Q})(k+1) = (Q - \tilde{Q})(k)$$

et on en déduit que le polynôme  $Q - \tilde{Q}$  est constant.

On en déduit que

$$P(X) = X + \frac{1}{2}$$

est l'unique solution du problème posé.

**Exercice 24 :** [énoncé]

Par la formule de Taylor, on a pour tout  $x \geq 0$

$$P(a+x) = \sum_{k=0}^{\deg P} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} x^k \geq P(a) > 0$$

**Exercice 25 :** [énoncé]

Cette division euclidienne s'écrit  $P = Q(X - a)(X - b) + R$  avec  $\deg R < 2$ .

On peut écrire  $R = \alpha X + \beta$ . En évaluant en  $a$  et  $b$ , on obtient un système dont la résolution donne

$$\alpha = \frac{P(b) - P(a)}{b - a} \text{ et } \beta = \frac{bP(a) - aP(b)}{b - a}$$

**Exercice 26 :** [énoncé]

Cette division euclidienne s'écrit

$$P = Q(X - a)^2 + R \text{ avec } \deg R < 2$$

On peut écrire  $R = \alpha X + \beta$ .

En évaluant en  $a$ , puis en dérivant avant d'évaluer à nouveau en  $a$ , on obtient un système dont la résolution donne

$$\alpha = P'(a) \text{ et } \beta = P(a) - aP'(a)$$

**Exercice 27 :** [énoncé]

$(X \cos t + \sin t)^n = (X^2 + 1)Q + R$  avec  $\deg R < 2$  ce qui permet d'écrire  $R = aX + b$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Cette relation doit être aussi vraie dans  $\mathbb{C}[X]$  et peut donc être évaluée en  $i$  :

$(i \cos t + \sin t)^n = R(i) = ai + b$  or  $(i \cos t + \sin t)^n = e^{i(n\pi/2 - nt)}$  donc  $a = \sin n(\pi/2 - t)$  et  $b = \cos n(\pi/2 - t)$ .

**Exercice 28 :** [énoncé]

On a  $k = nq + r$  avec  $0 \leq r < n$ .

Or  $X^k - X^r = X^r(X^{nq} - 1)$  et  $X^n - 1 \mid X^{nq} - 1$ . On peut donc écrire

$$X^{nq} - 1 = (X^n - 1)Q(X)$$

puis

$$X^k = (X^n - 1)X^r Q(X) + X^r \text{ avec } \deg X^r < \deg(X^n - 1)$$

ce qui permet de reconnaître le reste de division euclidienne cherchée.

**Exercice 29 :** [énoncé]

(a)  $n = mq + r$  avec  $0 \leq r < m$ .

$X^n - 1 = X^{mq+r} - 1 = X^{mq+r} - X^r + X^r - 1 = X^r(X^{mq} - 1) + X^r - 1$   
or  $X^{mq} - 1 = (X^m - 1)(1 + X^m + \dots + X^{m(q-1)})$  donc

$X^n - 1 = (X^m - 1)Q + R$  avec  $Q = X^r(1 + X^m + \dots + X^{m(q-1)})$  et  $R = X^r - 1$ .

Puisque  $\deg R < \deg X^m - 1$ ,  $R$  est le reste de la division euclidienne de  $X^n - 1$  par  $X^m - 1$ .

(b) Suivons l'algorithme d'Euclide calculant le pgcd de  $n$  et  $m$ .

$a_0 = n$ ,  $a_1 = m$  puis tant que  $a_k \neq 0$ , on pose  $a_{k+1}$  le reste de la division euclidienne de  $a_{k-1}$  par  $a_k$ .

Cet algorithme donne  $\text{pgcd}(m, n) = a_p$  avec  $a_p$  le dernier reste non nul.

Par la question ci-dessus on observe que si on pose  $A_k = X^{a_k} - 1$  alors  $A_0 = X^n - 1$ ,  $A_1 = X^m - 1$  et pour tout  $k$  tel que  $a_k \neq 0$ ,  $A_k \neq 0$  et  $A_{k+1}$  est le reste de la division euclidienne de  $A_{k-1}$  par  $A_k$ .

Par suite  $\text{pgcd}(X^n - 1, X^m - 1) = \text{pgcd}(A_0, A_1) = \text{pgcd}(A_1, A_2) = \dots = \text{pgcd}(A_p, A_{p+1}) = A_p = X^{\text{pgcd}(m, n)} - 1$  car  $A_{p+1} = 0$  puisque  $a_{p+1} = 0$ .

**Exercice 30 :** [énoncé]

(a)  $X^3 - 2X^2 + 3X - 2 = (X - 1)(X^2 - X + 2)$ .

(b)  $X^3 - 3X^2 + 3X - 2 = (X - 2)(X^2 - X + 1)$ .

(c)  $X^3 + 3X^2 - 2 = (X + 1)(X^2 + 2X - 2)$ .

**Exercice 31 :** [énoncé]

$X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2 = (X^2 + 2)(X^2 + X + (\lambda - 2)) + (\mu - 2)X + 6 - 2\lambda$ .

Le polynôme  $X^2 + 2$  divise  $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$  si, et seulement si,  $\lambda = 3$ ,  $\mu = 2$ .

**Exercice 32 :** [énoncé]

On écrit  $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$

(a) On a

$$P(P(X)) - P(X) = \sum_{k=0}^n a_k \left( [P(X)]^k - X^k \right)$$

avec  $P(X) - X$  divisant  $[P(X)]^k - X^k$  car

$$a^k - b^k = (a - b) \sum_{\ell=0}^{k-1} a^\ell b^{k-1-\ell}$$

- (b)  $P(X) - X$  divise le polynôme  $P(P(X)) - P(X)$  et le polynôme  $P(X) - X$ . Il divise donc leur somme  $P(P(X)) - X$ .
- (c) Par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
La propriété est immédiate pour  $n = 1$  et vient d'être établie pour  $n = 2$ .  
Supposons la propriété vraie au rang  $n \geq 1$ .

$$P^{[n+1]}(X) - P(X) = \sum_{k=0}^p a_k \left( [P^{[n]}(X)]^k - X^k \right)$$

$P^{[n]}(X) - X$  divise  $[P^{[n]}(X)]^k - X^k$  donc  $P^{[n]}(X) - X$  divise  $P^{[n+1]}(X) - P(X)$ .

Par hypothèse de récurrence,  $P(X) - X$  divise alors  $P^{[n+1]}(X) - P(X)$  et enfin on en déduit que  $P(X) - X$  divise  $P^{[n+1]}(X) - X$ .

Récurrence établie.

### Exercice 33 : [énoncé]

Puisque

$$P(P(X)) - X = (P(P(X)) - P(X)) + (P(X) - X)$$

le problème revient à montrer que  $P(X) - X$  divise  $P(P(X)) - P(X)$ .

On écrit  $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$  et on a

$$P(P(X)) - P(X) = \sum_{k=0}^n a_k \left( [P(X)]^k - X^k \right)$$

avec  $P(X) - X$  divisant  $[P(X)]^k - X^k$  car

$$a^k - b^k = (a - b) \sum_{\ell=0}^{k-1} a^\ell b^{k-1-\ell}$$

On en déduit que  $P(X) - X$  divise le polynôme  $P(P(X)) - P(X)$  et donc le polynôme  $P(P(X)) - X$ .

### Exercice 34 : [énoncé]

Posons  $D = \text{pgcd}(A, B)$ . On a  $D^2 = \text{pgcd}(A^2, B^2)$  associé à  $A^2$  donc  $\deg D^2 = \deg A^2$  puis  $\deg D = \deg A$ .

Or  $D \mid A$  donc  $D$  et  $A$  sont associés. Puisque  $D \mid B$ , on obtient  $A \mid B$ .

### Exercice 35 : [énoncé]

(i)  $\implies$  (ii) Posons  $D = \text{pgcd}(A, B)$  qui est non constant.

Puisque  $D \mid A$  et  $D \mid B$  on peut écrire  $A = DV$  et  $-B = DU$  avec  $\deg V < \deg A$  et  $\deg U < \deg B$ .

de sorte que  $AU + BV = DUV - DUV = 0$ .

(ii)  $\implies$  (i) Supposons (ii)

Si par l'absurde  $A \wedge B = 1$  alors, puisque  $A \mid -BV$  on a  $A \mid V$ .

Or  $V \neq 0$  donc  $\deg A \leq \deg V$  ce qui est exclu. Absurde.

### Exercice 36 : [énoncé]

Si  $A \wedge B = 1$  alors il existe  $U, V \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $AU + BV = 1$ .

On a alors  $A(U - V) + (A + B)V = 1$  donc  $A \wedge (A + B) = 1$ . De même

$B \wedge (A + B) = 1$ .

Par suite  $AB \wedge (A + B) = 1$ .

Si  $AB \wedge (A + B) = 1$  alors puisque  $\text{pgcd}(A, B) \mid AB$  et  $\text{pgcd}(A, B) \mid A + B$  on a  $\text{pgcd}(A, B) = 1$  puis  $A \wedge B = 1$ .

### Exercice 37 : [énoncé]

$\text{pgcd}(A, C) \mid A$  et  $\text{pgcd}(A, C) \mid C$  donc  $\text{pgcd}(A, C) \mid BC$  puis

$\text{pgcd}(A, C) \mid \text{pgcd}(A, BC)$ .

Inversement. Posons  $D = \text{pgcd}(A, BC)$ . On a  $D \mid A$  et  $A \wedge B = 1$  donc  $D \wedge B = 1$ .

De plus  $D \mid BC$  donc par le théorème de Gauss,  $D \mid C$  et finalement

$D \mid \text{pgcd}(A, C)$ .

### Exercice 38 : [énoncé]

Si  $a = b$  alors  $(X - a)^2$  divise  $(X^3 - a)^2$  si, et seulement si,  $a$  est racine au moins double de  $(X^3 - a)^2$ . Ceci équivaut à  $a^3 = a$  ce qui donne  $a \in \{-1, 0, 1\}$ .

Les polynômes solutions correspondant sont alors  $X^2, (X - 1)^2$  et  $(X + 1)^2$ , tous réels.

Si  $a \neq b$  alors  $(X - a)(X - b)$  divise  $(X^3 - a)(X^3 - b)$  si, et seulement si,  $a$  et  $b$  sont racines de  $(X^3 - a)(X^3 - b)$ .

Si  $a^3 \neq b^3$  alors  $a$  et  $b$  sont racines  $(X^3 - a)(X^3 - b)$  si, et seulement si,

$$\begin{cases} a^3 = a \\ b^3 = b \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a^3 = b \\ b^3 = a \end{cases}.$$

Dans le premier cas, sachant  $a \neq b$ , on parvient aux polynômes  $X(X - 1), X(X + 1)$  et  $(X - 1)(X + 1)$ .

Puisque

$$\begin{cases} a^3 = b \\ b^3 = a \end{cases} \iff \begin{cases} b = a^3 \\ a^9 = a \end{cases},$$

dans le second cas, on parvient à  $(X - e^{i\pi/4})(X - e^{3i\pi/4}), X^2 + 1$  et  $(X - e^{-i\pi/4})(X - e^{-3i\pi/4})$ .

Ainsi quand  $a \neq b$  et  $a^3 \neq b^3$ , on parvient à 6 polynômes dont 4 réels. Enfin, si  $a \neq b$  et  $a^3 = b^3$  alors  $(X - a)(X - b)$  divise  $(X^3 - a)(X^3 - b)$  si, et seulement si,  $a^3 = a$  ou  $a^3 = b$ . Quitte à échanger  $a$  et  $b$ , on peut supposer  $a^3 = a$  et on parvient alors aux polynômes  $(X - 1)(X - j), (X - 1)(X - j^2), (X + 1)(X + j)$  et  $(X + 1)(X + j^2)$  selon que  $a = 1$  ou  $a = -1$  (le cas  $a = 0$  étant à exclure car entraînant  $b = a$ ).

Au final on obtient  $3 + 6 + 4 = 13$  polynômes solutions dont  $3 + 4 + 0 = 7$  réels.

**Exercice 39 : [énoncé]**

(a)  $P(p/q) = 0$  donne

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

Puisque  $p \mid a_n p^n + \dots + a_1 p q^{n-1}$ , on a  $p \mid a_0 q^n$  or  $p \wedge q = 1$  donc  $p \mid a_0$ . De même  $q \mid a_n$ .

(b) Si  $P$  admet un racine rationnelle  $r = \frac{p}{q}$  alors  $p \in \{-5, -1, 1, 5\}$  et  $q \in \{1, 2\}$ .  $-\frac{5}{2}$  est racine de  $P$ .

$$P = 2X^3 - X^2 - 13X + 5 = (2X + 5)(X^2 - 3X + 1) = (2X + 5) \left( X - \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) \left( X - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)$$

(c) Si  $P$  est composé dans  $\mathbb{Q}[X]$  alors  $P$  possède une racine rationnelle, or ce n'est pas le cas.

Donc  $P$  est irréductible dans  $\mathbb{Q}[X]$ .

**Exercice 40 : [énoncé]**

$P(a) = P(b) = P(c) = 1$  et  $a, b, c$  deux à deux distincts donc

$$(X - a)(X - b)(X - c) \mid P - 1$$

De plus  $\deg P \leq 3$  donc il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que

$$P = \lambda(X - a)(X - b)(X - c) + 1$$

Puisque  $P(0) = 0$ , on a  $\lambda = \frac{1}{abc}$ .

**Exercice 41 : [énoncé]**

(a)  $\sin((2n + 1)\alpha) = \text{Im}(e^{i(2n+1)\alpha}) = \text{Im}((\cos \alpha + i \sin \alpha)^{2n+1})$  donne en développant  $\sin((2n + 1)\alpha) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} \cos^{2(n-p)} \alpha \cdot \sin^{2p+1} \alpha$ .

(b) On observe  $\sin((2n + 1)\alpha) = \sin^{2n+1} \alpha P(\cot^2 \alpha)$ .

Posons  $\beta_k = \frac{k\pi}{2n+1}$  pour  $1 \leq k \leq n$ . Les  $x_k = \cot^2 \beta_k$  sont  $n$  racines distinctes de  $P$ , or  $\deg P = n$ , ce sont donc exactement les racines de  $P$ .

**Exercice 42 : [énoncé]**

(a) On a

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

donc

$$4a^3 - 3a = \cos(\pi/3) = 1/2$$

Ainsi  $a$  est racine du polynôme  $8X^3 - 6X - 1$ .

(b) Soit  $x$  une racine rationnelle de ce polynôme. On peut écrire  $x = p/q$  avec  $p \wedge q = 1$ . On a alors

$$8p^3 - 6pq^2 - q^3 = 0$$

On en déduit  $p \mid 8p^3 - 6pq^2 = q^3$ . Or  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux et donc par le théorème de Gauss  $p = \pm 1$ . De plus  $q^2 \mid 6pq^2 + q^3 = 8p^3$  et, par un argument analogue au précédent,  $q^2 \mid 8$ . Ainsi  $q = \pm 1$  ou  $q = \pm 2$ .

Or  $1, -1, 1/2$  et  $-1/2$  ne sont pas les valeurs de  $\cos(\pi/9)$ . On peut donc

conclure que  $a$  est irrationnel.

**Exercice 43 : [énoncé]**

(a) Posons

$$P(X) = \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

On a  $\deg P \leq n - 1$  et

$$\forall 1 \leq k \leq n, P(a_k) = 1$$

Le polynôme  $P - 1$  possède donc  $n$  racines et étant de degré strictement inférieur à  $n$ , c'est le polynôme nul. On conclut  $P = 1$ .

(b) On a

$$A'(X) = \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} (X - a_j)$$

donc

$$A'(a_i) = \prod_{i \neq j} (a_i - a_j)$$

La quantité

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{A'(a_i)}$$

apparaît alors comme le coefficient de  $X^{n-1}$  dans le polynôme  $P$ .

On conclut que pour  $n \geq 2$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{A'(a_i)} = 0$$

**Exercice 44 :** [énoncé]

Les racines de  $X^p - 1$  sont simples et toutes racines de  $X^{pq} - 1$ .  
 Les racines de  $X^q - 1$  sont simples et toutes racines de  $X^{pq} - 1$ .  
 En dehors de 1, les racines de  $X^p - 1$  et  $X^q - 1$  sont distinctes.  
 Comme 1 racine double de  $(X - 1)(X^{pq} - 1)$ , on peut conclure  
 $(X^p - 1)(X^q - 1) \mid (X - 1)(X^{pq} - 1)$ .

**Exercice 45 :** [énoncé]

- (a) Posons  $P = (X + 1)^n - nX - 1$ . On a  $P(0) = 0$  et  $P' = n(X + 1)^{n-1} - n$   
 donc  $P'(0) = 0$ .  
 0 est au moins racine double de  $P$  donc  $X^2 \mid P$ .
- (b) Posons  $P = nX^{n+2} - (n + 2).X^{n+1} + (n + 2)X - n$ . On observe  
 $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ .  
 1 est au moins racine triple de  $P$  donc  $(X - 1)^3 \mid P$ .

**Exercice 46 :** [énoncé]

$1 + X + X^2 = (X - j)(X - j^2)$ .  
 $j$  et  $j^2$  sont racines de  $X^{3n} + X^{3p+1} + X^{3q+2}$  donc  
 $1 + X + X^2 \mid X^{3n} + X^{3p+1} + X^{3q+2}$ .

**Exercice 47 :** [énoncé]

On peut factoriser

$$X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2)$$

On en déduit

$$X^2 + X + 1 \mid X^{2n} + X^n + 1 \iff j \text{ et } j^2 \text{ sont racines de } X^{2n} + X^n + 1$$

Puisque  $X^{2n} + X^n + 1$  est un polynôme réel  $j$  en est racine si, et seulement si,  $j^2$  l'est.

$$(X^{2n} + X^n + 1)(j) = j^{2n} + j^n + 1 = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad [3]$$

Finalement

$$X^2 + X + 1 \mid X^{2n} + X^n + 1 \iff n \neq 0 \quad [3]$$

**Exercice 48 :** [énoncé]

Soit  $P$  solution.  $X \mid (X + 4)P(X)$  donc  $X \mid P$  puis  $(X + 1) \mid P(X + 1)$  donc  
 $(X + 1) \mid (X + 4)P(X)$  puis  $X + 1 \mid P$  etc...  
 Ainsi on obtient que  $P(X) = X(X + 1)(X + 2)(X + 3)Q(X)$  avec  
 $Q(X + 1) = Q(X)$  donc  $Q$  constant.  
 La réciproque est immédiate.

**Exercice 49 :** [énoncé]

Dans un premier temps cherchons  $P$  vérifiant  $P(0) = 1, P(1) = 2, P'(0) = 3, P'(1) = 4, P''(0) = 5$  et  $P''(1) = 6$  puis on considèrera  $P(X - 1)$  au terme des calculs.

Un polynôme vérifiant  $P(0) = 1$  et  $P(1) = 2$  est de la forme

$$P(X) = X + 1 + X(X - 1)Q(X)$$

Pour que le polynôme  $P$  vérifie  $P'(0) = 3, P'(1) = 4, P''(0) = 5$  et  $P''(1) = 6$   
 on veut que  $Q$  vérifie  $Q(0) = -2, Q(1) = 3, Q'(0) = -9/2$  et  $Q'(1) = 0$ .  
 Le polynôme  $Q(X) = 5X - 2 + X(X - 1)R(X)$  vérifie les deux premières conditions et vérifie les deux suivantes si  $R(0) = 19/2$  et  $R(1) = -5$ .  
 Le polynôme  $R = -\frac{29}{2}X + \frac{19}{2}$  convient.  
 Finalement

$$P(X) = X + 1 + X(X - 1) \left( 5X - 2 + X(X - 1) \left( -\frac{29}{2}X + \frac{19}{2} \right) \right)$$

est solution du problème transformé et

$$P(X) = -\frac{29}{2}X^5 + 111X^4 - \frac{655}{2}X^3 + 464X^2 - 314X + 82$$

est solution du problème initial.

Les autres solutions s'en déduisent en observant que la différence de deux solutions possède 1 et 2 comme racine triple.

Finalement, la solution générale est

$$-\frac{29}{2}X^5 + 111X^4 - \frac{655}{2}X^3 + 464X^2 - 314X + 82 + (X-1)^3(X-2)^3Q(X)$$

avec  $Q \in \mathbb{C}[X]$ .

### Exercice 50 : [énoncé]

- (a) Puisque les racines communes à  $P$  et  $P'$  permettent de dénombrer les multiplicités des racines de  $P$ , on a

$$p = \deg P - \deg(\text{pgcd}(P, P'))$$

et des relations analogues pour  $q$  et  $r$ .

De plus, on a

$$P'Q - Q'P = Q'R - R'Q = R'P - P'R$$

et ce polynôme est non nul car les polynômes  $P, Q, R$  sont non constants. En effet, si  $P'Q - Q'P = 0$ , alors une racine de  $P$  est nécessairement racine de  $Q$  ce qui est exclu.

Puisque les polynômes  $\text{pgcd}(P, P')$ ,  $\text{pgcd}(Q, Q')$  et  $\text{pgcd}(R, R')$  divisent chacun le polynôme  $Q'R - R'Q$  et puisqu'ils sont deux à deux premiers entre eux (car  $P, Q, R$  le sont), on a

$$\text{pgcd}(P, P') \text{pgcd}(Q, Q') \text{pgcd}(R, R') \mid Q'R - R'Q$$

Par considérations des degrés

$$\deg P - p + \deg Q - q + \deg R - r \leq \deg Q + \deg R - 1$$

et donc

$$\deg P \leq p + q + r - 1$$

- (b) Soient  $n \geq 3$  et  $P, Q, R$  vérifiant

$$P^n + Q^n = R^n$$

Si  $a$  est racine commune aux polynômes  $P$  et  $Q$  alors  $a$  est racine de  $R$ . En suivant ce raisonnement et en simplifiant les racines communes, on peut se ramener à une situation où les polynômes  $P, Q, R$  sont deux à deux premiers entre eux. Il en est alors de même de  $P^n, Q^n$  et  $R^n$ . L'étude qui précède donne alors

$$n \deg P < p + q + r$$

mais aussi, de façon analogue

$$n \deg Q < p + q + r \text{ et } n \deg R < p + q + r$$

En sommant ces trois relations, on obtient

$$n(\deg P + \deg Q + \deg R) < 3(p + q + r)$$

ce qui est absurde car  $n \geq 3$ ,  $\deg P \geq p$  etc.

On en déduit que les polynômes  $P, Q, R$  sont constants.

Les solutions de l'équation

$$P^n + Q^n = R^n$$

apparaissent alors comme des triplets

$$P = \alpha T, Q = \beta T \text{ et } R = \gamma T$$

avec  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$  et  $T \in \mathbb{C}[X]$  vérifiant

$$\alpha^n + \beta^n = \gamma^n$$

- (c) Pour

$$P = \frac{1}{2}(X^2 + 1), Q = \frac{i}{2}(X^2 - 1) \text{ et } R = X$$

on a

$$P^2 + Q^2 = R^2$$

ce qui produit un triplet solution d'une forme différente des précédents obtenus pour  $n \geq 3$ .

### Exercice 51 : [énoncé]

- (a) Supposons  $\sqrt{6} = p/q$  avec  $p \wedge q = 1$ . On a  $6q^2 = p^2$  donc  $p$  pair,  $p = 2k$ . On obtient alors  $3q^2 = 2k^2$  et donc  $q$  est pair. Absurde car  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux.

- (b) Par développement selon la formule du binôme de Newton

$$(a + \sqrt{b})^n = \alpha_k + \beta_k \sqrt{b} \text{ avec } \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{Z}$$

- (c)  $a + \sqrt{b}$  racine de  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  donne

$$\sum_{k=0}^n a_k \alpha_k = \left( \sum_{k=0}^n a_k \beta_k \right) \sqrt{b}$$

L'irrationalité de  $\sqrt{b}$  entraîne

$$\sum_{k=0}^n a_k \alpha_k = \sum_{k=0}^n a_k \beta_k = 0$$

ce qui permet de justifier qu'alors  $P(a - \sqrt{b}) = 0$ .

(d) Posons

$$Q = (X - a + \sqrt{b})(X - a - \sqrt{b}) = X^2 - 2aX + a^2 - b \in \mathbb{Z}[X]$$

Par division euclidienne  $P = QS + T$  avec  $\deg T < 2$ . Or en posant cette division euclidienne, on peut affirmer que  $S, T \in \mathbb{Z}[X]$  avec  $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$  et  $Q$  unitaire.  $a + \sqrt{b}, a - \sqrt{b}$  racine de  $P$  entraîne  $T = 0$  et donc  $P = QS$  avec  $Q, S \in \mathbb{Z}[X]$ . En dérivant  $P' = Q'S + QS'$  et  $a + \sqrt{b}$  entraîne racine de  $P'$  donne  $a + \sqrt{b}$  racine de  $S$ . On peut alors comme ci-dessus justifier  $S = QR$  avec  $R \in \mathbb{Z}[X]$  et conclure.

### Exercice 52 : [énoncé]

- (a) Si  $P(a) = 0$  alors  $P(a^2) = -P(a)P(a+1) = 0$  donc  $a^2$  est racine de  $P$ .  
 (b) Si  $a \neq 0$  et  $a$  non racine de l'unité alors la suite des  $a^{2^n}$  est une suite de complexe deux à deux distincts, or tous les termes de cette suite sont racines de  $P$  or  $P \neq 0$  donc ce polynôme ne peut avoir une infinité de racines. Absurde.

### Exercice 53 : [énoncé]

Si  $a$  est racine de  $P$  alors  $a^2, a^4, \dots$  le sont aussi. Comme un polynôme non nul n'a qu'un nombre fini de racines, on peut affirmer que les  $a, a^2, a^4, \dots$  sont redondants ce qui implique  $a = 0$  ou  $|a| = 1$ .

Si  $a$  est racine de  $P$  alors  $(a-1)^2$  l'est aussi donc  $a-1 = 0$  ou  $|a-1| = 1$ .

Si  $a \neq 0$  et  $a \neq 1$  on a nécessairement  $|a| = |a-1| = 1$ . Via parties réelle et imaginaire, on obtient  $a = -j$  ou  $-j^2$ .

Si  $P$  est solution, non nulle, alors son coefficient dominant vaut 1 et on peut écrire :

$P = X^\alpha(X-1)^\beta(X^2 - X + 1)^\gamma$ . En injectant une telle expression dans l'équation, on observe que celle-ci est solution si, et seulement si,  $\alpha = \beta$  et  $\gamma = 0$ .

### Exercice 54 : [énoncé]

Le polynôme nul est solution. Soit  $P$  une solution non nulle.

Si  $a$  est racine de  $P$  alors  $a^2$  l'est aussi puis  $a^4, a^8, \dots$

Or les racines de  $P$  sont en nombre fini donc les éléments  $a^{2^n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sont redondants. On en déduit que  $a = 0$  ou  $a$  est une racine de l'unité.

De plus, si  $a$  est racine de  $P$  alors  $(a-1)$  est aussi racine de  $P(X+1)$  donc  $(a-1)^2$  est racine de  $P$ . On en déduit que  $a-1 = 0$  ou  $a-1$  est racine de l'unité.

Si  $a \neq 0, 1$  alors  $|a| = |a-1| = 1$  d'où l'on tire  $a = -j$  ou  $-j^2$ .

Au final, les racines possibles de  $P$  sont  $0, 1, -j$  et  $-j^2$ .

Le polynôme  $P$  s'écrit donc

$$P(X) = \lambda X^\alpha (X-1)^\beta (X+j)^\gamma (X+j^2)^\delta$$

avec  $\lambda \neq 0, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$ .

En injectant cette expression dans l'équation

$$P(X^2) = P(X)P(X+1)$$

on obtient

$$\lambda^2 = \lambda, \alpha = \beta \text{ et } \gamma = \delta = 0$$

On conclut

$$P(X) = [X(X-1)]^\alpha$$

### Exercice 55 : [énoncé]

- (a) Si  $a$  est une racine de  $P$  non nulle alors  $a^2, a^4, \dots$  sont racines de  $P$ . Or  $P \neq 0$  donc  $P$  n'admet qu'un nombre fini de racines. La série précédente est donc redondante et par suite  $a$  est une racine de l'unité et donc  $|a| = 1$ .

Si  $a = 0$  est racine de  $P$  alors  $1 = (0+1)^2$  aussi puis  $4 = (1+1)^2$  l'est encore, ... et finalement  $P$  admet une infinité de racines ce qui est exclu. Finalement les racines de  $P$  sont toutes de module 1.

- (b) Soit  $a \in \mathbb{C}$  une racine de  $P$ .  $a+1$  est racine de  $P(X-1)$  donc  $(a+1)^2$  est aussi racine de  $P$ . Il s'ensuit que  $|a| = |a+1| = 1$ . En résolvant cette double équation on obtient  $a = j$  ou  $j^2$  et donc  $P$  est de la forme

$$P(X) = \lambda(X-j)^\alpha (X-j^2)^\beta$$

Le nombre  $j$  est racine de multiplicité  $\alpha$  de  $P$  donc  $j$  est racine de multiplicité au moins  $\alpha$  de

$$P(X^2) = (X^2 - j)^\alpha (X^2 - j^2)^\beta$$

et par suite  $\beta \geq \alpha$ . Un raisonnement symétrique permet de conclure  $\beta = \alpha$  et le polynôme  $P$  est de la forme

$$\lambda(X^2 + X + 1)^\alpha$$

Un tel  $P$  est solution du problème posé si, et seulement si,

$$\lambda^2(X^4 + X^2 + 1)^\alpha = \lambda((X - 1)^2 + (X - 1) + 1)^\alpha(X^2 + X + 1)^\alpha$$

égalité qui est vérifiée si, et seulement si,  $\lambda = 1$ .

Finalement les solutions du problème posé sont les polynômes

$$P = (X^2 + X + 1)^\alpha \text{ avec } \alpha \in \mathbb{N}.$$

**Exercice 56 :** [énoncé]

Supposons  $P$  solution.

Le coefficient dominant  $\lambda$  de  $P$  vérifie  $\lambda = \lambda^2$  et donc est égal à 1.

Si  $a$  est racine de  $P$  alors  $a^2$  et  $(a + 1)^2$  le sont aussi.

Si  $a \neq 0$  est une racine de  $P$  alors  $a^2, a^4, \dots$  sont racines de  $P$ . Or  $P \neq 0$  et donc  $P$  n'admet qu'un nombre fini de racines. La suite précédente est donc redondante et par conséquent  $a$  est une racine de l'unité. En particulier  $|a| = 1$ .

Si  $a = 0$  est racine de  $P$  alors  $1 = (0 + 1)^2$  aussi puis  $4 = (1 + 1)^2$  l'est encore, ... et finalement  $P$  admet une infinité de racines ce qui est exclu.

Finalement les racines de  $P$  sont toutes de module 1.

Or si  $a$  est racine de  $P$ ,  $(a + 1)^2$  l'étant encore et donc

$$|a| = |a + 1| = 1$$

Les seuls complexes vérifiant cette identité sont  $j$  et  $j^2$  (ce sont les points intersection du cercle unité et du cercle de centre  $-1$  et de rayon 1 du plan complexe). On en déduit

$$P = (X^2 + X + 1)^n$$

car  $P$  est un polynôme réel et que donc ses racines complexes conjuguées sont d'égales multiplicités.

Inversement, on vérifie par le calcul qu'un tel polynôme est bien solution.

**Exercice 57 :** [énoncé]

Le polynôme nul est solution. Soit  $P$  une solution non nulle.

Si  $a$  est racine de  $P$  alors  $a^2$  l'est aussi puis  $a^4, a^8, \dots$

Or les racines de  $P$  sont en nombre fini donc les éléments  $a^{2^n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sont redondants. On en déduit que  $a = 0$  ou  $a$  est une racine de l'unité.

De plus, si  $a$  est racine de  $P$  alors  $(a + 1)$  est aussi racine de  $P(X - 1)$  donc  $(a + 1)^2$  est racine de  $P$ . On en déduit que  $a + 1 = 0$  ou  $a + 1$  est racine de l'unité. Si  $a \neq 0, -1$  alors  $|a| = |a + 1| = 1$  d'où l'on tire  $a = j$  ou  $j^2$ .

Au final, les racines possibles de  $P$  sont  $0, -1, j$  et  $j^2$ .

Le polynôme  $P$  s'écrit donc  $P(X) = \lambda X^\alpha (X + 1)^\beta (X - j)^\gamma (X - j^2)^\delta$  avec  $\lambda \neq 0, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$ .

En injectant cette expression dans l'équation  $P(X^2) = P(X)P(X - 1)$  on obtient  $\lambda^2 = \lambda, \alpha = \beta = 0$  et  $\gamma = \delta$ .

On conclut

$$P(X) = [X^2 + X + 1]^\gamma$$

**Exercice 58 :** [énoncé]

(a) Dans  $\mathbb{C}[X]$

$$X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i)$$

et dans  $\mathbb{R}[X]$

$$X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$$

(b) Dans  $\mathbb{C}[X]$

$$X^5 - 1 = \prod_{k=0}^4 (X - e^{\frac{2ik\pi}{5}})$$

et dans  $\mathbb{R}[X]$

$$X^5 - 1 = (X - 1)(X^2 - 2\cos\frac{2\pi}{5}X + 1)(X^2 - 2\cos\frac{4\pi}{5}X + 1)$$

(c) Dans  $\mathbb{C}[X]$

$$(X^2 - X + 1)^2 + 1 = (X^2 - X + 1 + i)(X^2 - X + 1 - i) = (X - i)(X - 1 + i)(X + i)(X - 1 - i)$$

et dans  $\mathbb{R}[X]$

$$(X^2 - X + 1)^2 + 1 = (X^2 + 1)(X^2 - 2X + 2)$$

**Exercice 59 :** [énoncé]

(a)  $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2 - X^2 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$

(b)  $X^4 + X^2 - 6 = (X^2 + 1/2)^2 - 25/4 = (X^2 - 2)(X^2 + 3) = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X^2 + 3)$

(c)  $X^8 + X^4 + 1 = (X^4 + 1)^2 - (X^2)^2 = (X^4 - X^2 + 1)(X^4 + X^2 + 1)$  puis  
 $X^8 + X^4 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)$ .

**Exercice 60 :** [énoncé]

Les racines de  $(X + i)^n - (X - i)^n$  sont les  $z_k = \cot \frac{k\pi}{n}$  avec  $k \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ .  
 Par suite

$$\prod_{k=1}^{n-1} (X - \cot \frac{k\pi}{n}) \mid (X + i)^n - (X - i)^n$$

et il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que

$$(X + i)^n - (X - i)^n = \lambda \prod_{k=1}^{n-1} (X - \cot \frac{k\pi}{n})$$

Le coefficient dominant de  $(X + i)^n - (X - i)^n$  étant  $2ni$ , on obtient

$$(X + i)^n - (X - i)^n = 2ni \prod_{k=1}^{n-1} (X - \cot \frac{k\pi}{n})$$

**Exercice 61 :** [énoncé]

Les racines complexes de  $P$  sont les  $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$  avec  $k \in \{0, \dots, 2n\}$ .  
 On observe  $\overline{\omega_k} = \omega_{2n-k}$  pour  $k \in \{1, \dots, n\}$  donc

$$P = (X - 1) \prod_{k=1}^n (X - \omega_k)(X - \overline{\omega_k}) = (X - 1) \prod_{k=1}^n \left( X^2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{2n+1} X + 1 \right)$$

**Exercice 62 :** [énoncé]

Les racines de  $X^2 - 2 \cos(na)X + 1$  sont  $e^{ina}$  et  $e^{-ina}$  donc

$$X^{2n} - 2 \cos(na)X^n + 1 = (X^n - e^{ina})(X^n - e^{-ina})$$

Les racines de  $X^n - e^{ina}$  sont les  $e^{ia+2ik\pi/n}$  avec  $k \in \{0, \dots, n - 1\}$  et celles de  $X^n - e^{-ia}$  s'en déduisent par conjugaison.

Ainsi

$$X^{2n} - 2 \cos(na)X^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{ia+2ik\pi/n}) \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{-ia-2ik\pi/n})$$

dans  $\mathbb{C}[X]$  puis

$$X^{2n} - 2 \cos(na)X^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{ia+2ik\pi/n})(X - e^{-ia-2ik\pi/n}) = \prod_{k=0}^{n-1} (X^2 - 2 \cos \left( a + \frac{2k\pi}{n} \right) X + 1)$$

dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Exercice 63 :** [énoncé]

Notons  $x_1, x_2, x_3, x_4$  les racines du polynôme considéré avec  $x_1 + x_2 = 2$ .

$$\begin{cases} \sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0 \\ \sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -12 \\ \sigma_4 = x_1x_2x_3x_4 = -5 \end{cases}$$

$\sigma_1$  donne  $x_3 + x_4 = -2$ ,  $\sigma_2$  donne  $x_1x_2 + x_3x_4 = 4$  et  $\sigma_3$  donne  $x_1x_2 - x_3x_4 = 6$ .

On obtient  $x_1x_2 = 5$  et  $x_3x_4 = -1$ .

$x_1$  et  $x_2$  sont les racines de  $X^2 - 2X + 5$  i.e.  $1 \pm 2i$ .

$x_3$  et  $x_4$  sont les racines de  $X^2 + 2X - 1$  i.e.  $-1 \pm \sqrt{2}$ .

**Exercice 64 :** [énoncé]

Notons  $x_1, x_2, x_3$  les racines de  $X^3 - 7X + \lambda$ . On peut supposer  $x_2 = 2x_1$ .

Les relations entre coefficients et racines donnent :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -7 \\ x_1x_2x_3 = -\lambda \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} x_3 = -3x_1 \\ 2x_1^2 - 6x_1^2 - 3x_1^2 = -7 \\ -6x_1^3 = -\lambda \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} x_3 = -3x_1 \\ x_1^2 = 1 \\ \lambda = 6x_1^3 \end{cases}$$

Pour que  $X^3 - 7X + \lambda$  admette une racine double d'une autre il est nécessaire que  $\lambda = 6$  ou  $-6$ .

Pour  $\lambda = 6$ ,  $X^3 - 7X + 6$  admet  $1, 2$  et  $-3$  pour racines.

Pour  $\lambda = -6$ ,  $X^3 - 7X - 6$  admet  $-1, -2$  et  $3$  pour racines.

**Exercice 65 :** [énoncé]

Notons  $x_1, x_2, x_3$  les racines de  $X^3 - 8X^2 + 23X - 28$ . On peut supposer  $x_1 + x_2 = x_3$ .

Les relations entre coefficients et racines donnent :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 23 \\ x_1x_2x_3 = 28 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} x_3 = 4 \\ x_1x_2 + 4(x_2 + x_1) = 23 \\ 4x_1x_2 = 28 \end{cases}$$

Pour déterminer  $x_1$  et  $x_2$  il reste à résoudre  $x^2 - 4x + 7 = 0$ .

Finalement  $x_1 = 2 + i\sqrt{3}, x_2 = 2 - i\sqrt{3}$  et  $x_3 = 4$ .

**Exercice 66 :** [énoncé]

(a) 
$$\begin{cases} \sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 2 + \sqrt{2} \\ \sigma_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 2\sqrt{2} + 2, \\ \sigma_3 = x_1x_2x_3 = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

On en déduit  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 2$ ,

$x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 = \sigma_2^2 - 2\sigma_3\sigma_1 = 4$  et  $x_1^2x_2^2x_3^2 = 8$ .

Donc  $x_1^2, x_2^2$  et  $x_3^2$  sont racines de  $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$ .

(b) 2 est racine de l'équation ci-dessus :

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = (x - 2)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2i)(x - 2i).$$

Quitte à réindexer :  $x_1^2 = 2, x_2^2 = 2i$  et  $x_3^2 = -2i$  d'où

$$x_1 = \pm\sqrt{2}, x_2 = \pm(1 + i) \text{ et } x_3 = \pm(1 - i).$$

Puisque  $x_1 + x_2 + x_3 = 2 + \sqrt{2}$ , on a  $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = 1 + i$  et  $x_3 = 1 - i$ .

**Exercice 67 :** [énoncé]

(a) Soit  $(x, y, z)$  un triplet solution

On a  $\sigma_1 = x + y + z = 1, \sigma_3 = xyz = -4$  et

$$\sigma_2 = xy + yz + zx = xyz\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = -4$$

Par suite  $x, y, z$  sont les racines de :

$$X^3 - \sigma_1X^2 + \sigma_2X - \sigma_3 = X^3 - X^2 - 4X + 4 = (X - 1)(X - 2)(X + 2)$$

Donc  $\{x, y, z\} = \{1, -2, 2\}$ .

Inversement de tels triplets sont solutions.

(b) Soit  $(x, y, z)$  un triplet solution de

$$\begin{cases} x(y + z) = 1 & (1) \\ y(z + x) = 1 & (2) \\ z(x + y) = 1 & (3) \end{cases}$$

(1) - (2) donne  $xz = yz$ , (3) donne  $z \neq 0$  donc  $x = y$ .

De même on obtient  $x = z$ .

Ainsi  $x = y = z = 1/\sqrt{2}$  ou  $-1/\sqrt{2}$ .

Inversement de tels triplets sont solutions.

(c) Soit  $(x, y, z)$  un triplet solution.

Posons  $S_1 = x + y + z = 2, S_2 = x^2 + y^2 + z^2 = 14$  et  $S_3 = x^3 + y^3 + z^3$ .

Déterminons  $\sigma_1 = x + y + z, \sigma_2 = xy + yz + zx$  et  $\sigma_3 = xyz$ .

On a  $\sigma_1 = 2$ .

$S_1^2 - S_2 = 2\sigma_2$ . Par suite  $\sigma_2 = -5$ .

Posons  $t = x^2y + yx^2 + y^2z + zy^2 + z^2x + xz^2$ .

On a  $S_1S_2 = S_3 + t$  d'où  $t = S_1S_2 - S_3 = 8$

On a  $S_1^3 = S_3 + 3t + 6\sigma_3$  d'où  $\sigma_3 = \frac{1}{6}(S_1^3 - S_3 - 3t) = -6$ .

Par suite  $x, y, z$  sont les racines de

$$X^3 - \sigma_1X^2 + \sigma_2X - \sigma_3 = X^3 - 2X^2 - 5X + 6 = (X - 1)(X + 2)(X - 3)$$

Donc  $\{x, y, z\} = \{1, -2, 3\}$ .

Inversement de tels triplets sont solutions.

**Exercice 68 :** [énoncé]

En développant

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{xy} + \frac{2}{yz} + \frac{2}{zx}$$

avec

$$\frac{2}{xy} + \frac{2}{yz} + \frac{2}{zx} = \frac{2(z + x + y)}{2xyz} = 0$$

**Exercice 69 :** [énoncé]

(a) On a

$$(X - 1)P_n = X^{n+1} - 1 = \prod_{k=0}^n (X - e^{2ik\pi/(n+1)})$$

donc

$$P_n = \prod_{k=1}^n (X - e^{2ik\pi/(n+1)})$$

(b)  $P_n(1) = n + 1$  et

$$P_n(1) = \prod_{k=1}^n (1 - e^{2ik\pi/(n+1)}) = (-2i)^n \prod_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \prod_{k=1}^n e^{i\frac{k\pi}{n+1}}$$

mais

$$\prod_{k=1}^n e^{i\frac{k\pi}{n+1}} = \exp(in\pi/2) = i^n$$

donc

$$\prod_{k=1}^n \sin\frac{k\pi}{n+1} = \frac{n+1}{2^n}$$

**Exercice 70 : [énoncé]**

On écrit

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \text{ avec } a_n \neq 0$$

Notons  $\alpha_k$  la somme des zéros de  $P^{(k)}$ . Par les relations coefficients racines d'un polynôme scindé

$$\alpha_0 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \alpha_1 = -\frac{(n-1)a_{n-1}}{na_n}, \alpha_2 = -\frac{(n-2)a_{n-1}}{na_n}, \dots$$

$$\alpha_k = -\frac{(n-k)a_{n-1}}{na_n}, \dots, \alpha_{n-1} = -\frac{a_{n-1}}{na_n}$$

Les  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$  sont donc en progression arithmétique de raison  $a_{n-1}/na_n$ .

**Exercice 71 : [énoncé]**

Puisque  $\alpha + \beta + \gamma = -a$ , on a

$$\frac{\alpha}{\beta + \gamma} + \frac{\beta}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta} = -\left(\frac{\alpha}{a + \alpha} + \frac{\beta}{a + \beta} + \frac{\gamma}{a + \gamma}\right)$$

et réduisant au même dénominateur

$$\frac{\alpha}{\beta + \gamma} + \frac{\beta}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta} = \frac{a^3 - 2ab + 3c}{ab - c}$$

car  $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b$  et  $\alpha\beta\gamma = -c$ .

**Exercice 72 : [énoncé]**

Soit  $(x, y, z)$  un triplet de complexes et

$P(X) = (X - x)(X - y)(X - z) = X^3 - pX^2 + qX - r$  avec

$$\begin{cases} p = x + y + z \\ q = xy + yz + zx \\ r = xyz \end{cases}$$

On a

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$$

Posons  $t = x^3 + y^3 + z^3$  et  $s = xy^2 + yx^2 + yz^2 + zy^2 + zx^2 + xz^2$

On a

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) = t + s \text{ et } pq = s + 3r$$

donc  $t = 3r - pq$ .

Puisque  $x, y, z$  sont racines de  $XP(X) = X^4 - pX^3 + qX^2 - rX$ , on a

$$x^4 + y^4 + z^4 = pt - q(x^2 + y^2 + z^2) + rp$$

Puisque  $x, y, z$  sont racine de  $X^2P(X) = X^5 - pX^4 + qX^3 - rX^2$ , on a

$$x^5 + y^5 + z^5 = p(x^4 + y^4 + z^4) - q(x^3 + y^3 + z^3) + r(x^2 + y^2 + z^2)$$

On en déduit que  $(x, y, z)$  est solution du système posé si, et seulement si,

$$\begin{cases} p^2 = 2q \\ pt + rp = 0 \\ -qt = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire, sachant  $t = 3r - pq$ ,

$$\begin{cases} p^2 = 2q \\ p(4r - pq) = 0 \\ q(3r - pq) = 0 \end{cases}$$

Ce système équivaut encore à

$$\begin{cases} p^2 = 2q \\ 2pr = q^2 \\ 3qr = pq^2 \end{cases}$$

et aussi à

$$\begin{cases} p^2 = 2q \\ 2pr = q^2 \\ qr = 0 \end{cases}$$

Que  $r$  soit nul ou non, le système entraîne  $q = 0$  et est donc équivalent au système

$$\begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \end{cases}$$

Ainsi, un triplet  $(x, y, z)$  est solution du système proposé si, et seulement si,  $x, y$  et  $z$  sont les trois racines du polynôme  $P_r(X) = X^3 - r$  (pour  $r \in \mathbb{C}$  quelconque). En introduisant  $a \in \mathbb{C}$  tel que  $a^3 = r$ , les racines de  $P_r(X)$  sont  $a, aj$  et  $aj^2$ . Finalement les solutions du système, sont les triplets  $(x, y, z)$  avec

$$x = a, y = aj \text{ et } z = aj^2$$

pour  $a \in \mathbb{C}$  quelconque.

**Exercice 73 :** [\[énoncé\]](#)

On a

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{X - x_k}$$

donc

$$\frac{xP'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{x_k}{x}}$$

Par développement limité à un ordre  $N$ , on a quand  $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{xP'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{x_k}{x}} = \sum_{\ell=0}^N \frac{S_\ell}{x^\ell} + o\left(\frac{1}{x^N}\right)$$

puis

$$xP'(x) = \sum_{\ell=0}^N \frac{S_\ell}{x^\ell} P(x) + o\left(\frac{1}{x^{N-n}}\right)$$

Or

$$xP'(x) = na_0x^n + (n-1)a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}$$

et

$$\sum_{\ell=0}^N \frac{S_\ell}{x^\ell} P(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{N+2n}x^{N-n}$$

avec

$$b_0 = a_0S_0, b_1 = a_0S_1 + a_1S_0, \dots$$

$$b_k = \sum_{\ell=0}^{\min(k,n)} a_\ell S_{k-\ell}$$

Par unicité des coefficients de  $x^n, x^{n-1}, \dots, 1$  de notre développement limité généralisé, on obtient

$$\forall 0 \leq k \leq n, \sum_{\ell=0}^k a_\ell S_{k-\ell} = (n-k)a_k$$

Pour  $k = 0$ , on obtient  $S_0 = n$  (ce qui était immédiat) et on en déduit

$$\forall 0 < k \leq n, \sum_{\ell=0}^{k-1} a_\ell S_{k-\ell} + ka_k = 0$$

Par unicité des coefficients de  $1/x, 1/x^2, \dots$  de notre développement limité généralisé, on obtient

$$\forall k > n, \sum_{\ell=0}^n a_\ell S_{k-\ell} = 0$$

**Exercice 74 :** [\[énoncé\]](#)

- (a)  $1, j, j^2$  conviennent.
- (b) Introduisons le polynôme  $P(X) = (X - a)(X - b)(X - c)$ . Les coefficients de ce polynôme s'expriment à partir de  $S_1 = a + b + c, S_2 = a^2 + b^2 + c^2$  et  $S_3 = a^3 + b^3 + c^3$ , le polynôme  $P$  est donc à coefficients réels. S'il n'admet pas trois racines, il possède deux racines complexes conjuguées. Celles-ci sont alors de même module ce qui est exclu.

**Exercice 75 :** [\[énoncé\]](#)

- (a)  $f_0 : x \mapsto 1, f_1 : x \mapsto x, f_2 : x \mapsto 2x^2 - 1$  et  $f_3 : x \mapsto 4x^3 - 3x$
- (b)  $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2 \cos \theta \cos n\theta = 2x f_n(x)$  en posant  $\theta = \arccos x$ .
- (c) Existence : Par récurrence double sur  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $n = 0$  et  $n = 1 : T_0 = 1$  et  $T_1 = X$  conviennent. Supposons le résultat établi aux rangs  $n - 1$  et  $n \geq 1$ . Soit  $T_{n+1}$  le polynôme défini par  $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ . On a  $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) = 2xf_n(x) - f_{n-1}(x) = f_{n+1}(x)$ . Le polynôme  $T_{n+1}$  convient. Récurrence établie. Unicité : Si  $T_n$  et  $R_n$  conviennent, alors ceux-ci prennent mêmes valeurs en un infinité de points, ils sont donc égaux.

- (d) Comme  $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ , on montre par récurrence double sur  $n \in \mathbb{N}$  que  $\forall n \in \mathbb{N}, \deg T_n = n$ .  
 Il est alors aisé de montrer, par récurrence simple, que le coefficient dominant de  $T_n$  est  $2^{n-1}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Notons que le coefficient dominant de  $T_0$  est 1.
- (e) Résolvons l'équation  $T_n(x) = 0$  sur  $[-1; 1]$  :  
 $\cos(n \arccos x) = 0 \iff n \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \iff \arccos x = \frac{\pi}{2n} \quad \left[\frac{\pi}{n}\right]$   
 Posons  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  définis par  $x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ .  
 $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  forment  $n$  racines distinctes appartenant à  $] -1; 1[$  du polynôme  $T_n$ .  
 Or  $\deg T_n = n$  donc il ne peut y avoir d'autres racines et celles-ci sont nécessairement simples.

**Exercice 76 : [énoncé]**

- (a)  $a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$  sont racines de  $L_i$  donc  $\forall j \neq i, L_i(a_j) = 0$ .  
 De plus

$$L_i(a_i) = \frac{\prod_{0 \leq j \leq n, j \neq i} (a_i - a_j)}{\prod_{0 \leq j \leq n, j \neq i} (a_i - a_j)} = 1$$

Donc

$$\forall j \in \{0, 1, \dots, n\}, L_i(a_j) = \delta_{i,j}$$

- (b) Posons  $Q = \sum_{i=0}^n P(a_i)L_i(X)$ , on a

$$Q(a_j) = \sum_{i=0}^n P(a_i)L_i(a_j) = \sum_{i=0}^n P(a_i)\delta_{i,j} = P(a_j)$$

$P$  et  $Q$  sont deux polynômes de degré inférieur à  $n$  et prenant mêmes valeurs aux  $n+1$  points  $a_0, a_1, \dots, a_n$  ils sont donc égaux.

**Exercice 77 : [énoncé]**

- (a) Par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$   
 Pour  $n = 0$  : ok avec  $P_2 = X$ .  
 Supposons la propriété établie au rang  $n-1 \in \mathbb{N}$ .

$$1 + P_{n+2}P_n = 1 + XP_{n+1}P_n - P_n^2 = 1 + X(XP_n - P_{n-1})P_n - P_n^2$$

Par l'hypothèse de récurrence

$$1 + P_{n+2}P_n = X^2P_n^2 - XP_{n-1}P_n - P_{n-1}P_{n+1}$$

donc

$$1 + P_{n+2}P_n = X^2P_n^2 - XP_{n-1}P_n - P_{n-1}(XP_n - P_{n-1}) = X^2P_n^2 - 2XP_{n-1}P_n + P_{n-1}^2 = P_n^2 - P_{n-1}^2$$

Récurrence établie.

- (b) La relation ci-dessus peut se relire :  $UP_n + VP_{n+1} = 1$ . Donc  $P_n$  et  $P_{n+1}$  sont premiers entre eux.  
 (c) Par récurrence sur  $m \in \mathbb{N}$ , établissons la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_{m+n} = P_nP_{m+1} - P_{n-1}P_m$$

Pour  $m = 0$  : ok

Supposons la propriété établie au rang  $m \geq 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$P_{m+n+1} = P_{n+1}P_{m+1} - P_nP_m = (XP_n - P_{n-1})P_{m+1} - P_nP_m = (XP_{m+1} - P_m)P_n - P_{n-1}P_m$$

donc

$$P_{m+n+1} = P_{m+2}P_n - P_{n-1}P_{m+1}$$

Récurrence établie.

- (d) Posons  $D = \text{pgcd}(P_n, P_{n+m})$  et  $E = \text{pgcd}(P_n, P_m)$ .  
 Comme  $P_{n+m} = P_nP_{m+1} - P_{n-1}P_m$  on a  $E \mid D$ .  
 Comme  $P_{n-1}P_m = P_nP_{m+1} - P_{m+n}$  et  $P_n \wedge P_{n-1} = 1$  on a  $D \mid E$ .  
 Finalement  $D = E$ .  
 En notant  $r$  le reste de la division euclidienne de  $m$  par  $n$  on a  $m = nq + r$  avec  $q \in \mathbb{N}$  et

$$\text{pgcd}(P_n, P_m) = \text{pgcd}(P_n, P_{n-m}) = \text{pgcd}(P_n, P_{n-2m}) = \dots = \text{pgcd}(P_n, P_r)$$

- (e) En suivant l'algorithme d'Euclide menant le calcul de  $\text{pgcd}(m, n)$  simultanément avec celui menant le calcul de  $\text{pgcd}(P_m, P_n)$ , on observe que

$$\text{pgcd}(P_n, P_m) = P_{\text{pgcd}(m,n)}$$

**Exercice 78 : [énoncé]**

Par la formule de dérivation de Leibniz

$$\frac{d^n}{dx^n} (e^{-x}x^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^n)^{(n-k)} (e^{-x})^{(k)} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{n!}{k!} x^k e^{-x}$$

donc

$$L_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n!)^2}{(k!)^2(n-k)!} X^k$$

est un polynôme de degré  $n$  et de coefficient dominant  $(-1)^n$ .

**Exercice 79 :** [\[énoncé\]](#)

On a

$$\cos n\theta = \operatorname{Re}(e^{in\theta}) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k \cos^{n-k}\theta \sin^k\theta\right)$$

donc

$$\cos n\theta = \sum_{\ell=0}^{E(n/2)} (-1)^\ell \binom{n}{2\ell} \cos^{n-2\ell}\theta (1 - \cos^2\theta)^\ell$$

est un polynôme en  $\cos\theta$ . Cela assure l'existence de  $T_n$ , l'unicité provenant de ce que deux polynômes coïncidant en un nombre infini de points sont nécessairement égaux.

(a)

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta \cos n\theta$$

donne

$$T_{n+1} - 2XT_n + T_{n-1} = 0$$

(b) On a

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$$

donc en dérivant

$$-\sin\theta T'_n(\cos\theta) = -n \sin n\theta$$

et

$$\sin^2\theta T''_n(\cos\theta) - \cos\theta T'_n(\cos\theta) = -n^2 \cos n\theta$$

On en déduit par coïncidence de polynômes sur  $[-1; 1]$  que

$$(1 - X^2)T''_n - XT'_n + n^2T_n = 0$$

(c) En dérivant cette relation à l'ordre  $k$  :

$$(1 - X^2)T_n^{(k+2)} - 2kXT_n^{(k+1)} - k(k-1)T_n^{(k)} - XT_n^{(k+1)} - kT_n^{(k)} + n^2T_n^{(k)} = 0 \quad (1)$$

En évaluant (1) en 1 :

$$(2k+1)T_n^{(k+1)}(1) = (n^2 - k^2)T_n^{(k)}(1)$$

Comme  $T_n^{(0)}(1) = 1$ , on obtient

$$T_n^{(k)}(1) = \begin{cases} \frac{(n!)^2 2^k k!}{(n-k)!(n+k)!(2k+1)!} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En évaluant (1) en  $-1$  :

$$(2k+1)T_n^{(k+1)}(-1) = -(n^2 - k^2)T_n^{(k)}(-1)$$

Comme  $T_n^{(0)}(-1) = (-1)^n$ , on obtient

$$T_n^{(k)}(-1) = (-1)^{n-k} T_n^{(k)}(1)$$

**Exercice 80 :** [\[énoncé\]](#)

Soit  $(P, Q)$  un couple solution.

Si le polynôme  $P$  est constant alors nécessairement  $Q = 0$  et  $P = \pm 1$ . Vérification immédiate.

Sinon, posons  $n = \deg P \in \mathbb{N}^*$ . La relation  $P^2 + (1 - X^2)Q^2 = 1$  impose que  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux et en dérivant on obtient

$$PP' - XQ^2 + (1 - X^2)QQ' = 0.$$

Par suite  $Q \mid PP'$  puis  $Q \mid P'$ . Par des considérations de degré et de coefficient dominant on peut affirmer  $P' = \pm nQ$ .

Quitte à considérer  $-Q$ , supposons  $P' = nQ$  et la relation

$$PP' - XQ^2 + (1 - X^2)QQ' = 0 \text{ donne } (1 - X^2)P'' - XP' + n^2P = 0.$$

Résolvons l'équation différentielle  $(1 - t^2)y'' - ty' + n^2y = 0$  sur  $[-1; 1]$ .

Par le changement de variable  $t = \cos\theta$ , on obtient pour solution générale

$$y(t) = \lambda \cos(n \arccos t) + \mu \sin(n \arccos t).$$

La fonction  $t \mapsto \cos(n \arccos t)$  est polynômiale (cf. polynôme de Tchebychev), cela définit le polynôme  $T_n$ .

La fonction  $t \mapsto \sin(n \arccos t)$  ne l'est pas car de dérivée  $\frac{-n}{\sqrt{1-t^2}} \cos(n \arccos t)$  non polynômiale.

Par suite  $P = \lambda T_n$  et  $Q = \pm \frac{1}{n} T'_n$ .

La relation  $P^2 + (1 - X^2)Q^2 = 1$  évaluée en 1 impose  $\lambda^2 = 1$  et finalement

$$(P, Q) = (\pm T_n, \pm \frac{1}{n} T'_n).$$

Vérification : pour le couple  $(P, Q) = (\pm T_n, \pm \frac{1}{n} T'_n)$ , le polynôme  $P^2 + (1 - X^2)Q^2$  est constant car de polynôme dérivé nul et puisqu'il prend la valeur 1 en 1, on peut affirmer  $P^2 + (1 - X^2)Q^2 = 1$ .

**Exercice 81 :** [\[énoncé\]](#)

(a)  $P_2 = X^2 - 2, P_3 = X^3 - 3X.$

Par récurrence double sur  $n \in \mathbb{N}$ , on montre  $\deg P_n = n$  et  $\operatorname{coeff}(P_n) = 1$ .

(b) Par récurrence double sur  $n \in \mathbb{N}$  :

Pour  $n = 0$  et  $n = 1$  : ok

Supposons la propriété établie aux rangs  $n$  et  $n + 1$  (avec  $n \geq 0$ )

$$P_{n+2}(z) = (z+1/z)P_{n+1}(z) - P_n(z) \stackrel{HR}{=} \left(z + \frac{1}{z}\right) \left(z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}\right) - \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) = z^{n+2}$$

Réurrence établie.

$$(c) P_n(2 \cos \theta) = P_n(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2 \cos n\theta.$$

(d) Soit  $x \in [-2; 2]$ . Il existe  $\theta \in [0; \pi]$  unique tel que  $x = 2 \cos \theta$ .

$$P_n(x) = 0 \iff \cos n\theta = 0 \iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\}, \theta = \frac{\pi + 2k\pi}{2n}$$

Par suite les  $x_k = 2 \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2n}\right)$  avec  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  constituent  $n$  racines distinctes de  $a_n \neq 0$  et  $a_0 \neq 0$ . Puisque le polynôme  $P_n$  est de degré  $n$ , il n'y en a pas d'autres.

et

$$P_{n+1}(1) = (n+1)P_n(1)$$

donc

$$P_n(1) = n!$$

### Exercice 82 : [énoncé]

Montrons la propriété par récurrence sur  $n \geq 1$ .

Pour  $n = 1$ ,  $P_1(X) = X$  convient.

Supposons la propriété vraie au rang  $n \geq 1$ .

En dérivant la relation

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$$

on obtient

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1) \sin x P_n(\sin x) + \cos^2 x P_n'(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}$$

Posons alors

$$P_{n+1}(X) = (n+1)X P_n(X) + (1-X^2)P_n'(X)$$

de sorte que

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}$$

On peut écrire

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \text{ avec } a_k \geq 0, a_n \neq 0$$

et alors

$$P_{n+1}(X) = \sum_{k=0}^n (n+1-k)a_k X^{k+1} + \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}$$

est un polynôme de degré  $n+1$  à coefficients positif ou nul.

Réurrence établie.

Par la relation de récurrence obtenue ci-dessus

$$P_1(X) = X, P_2(X) = 1 + X^2 \text{ et } P_3(X) = 5X + X^3$$