EXERCICE 7

Entre deux plaques métalliques horizontales distantes de 1,5 cm, on applique une différence de potentiel de 3 kV. On constate alors que de petites gouttes d'huile chargées négativement sont en équilibres entre les deux plaques.

a. Quelles sont les polarités des plaques ?
b. Quelle est la charge d'une goutte d'huile ?
c. Comparer à la charge d'un électron.

On donne :

- masse volumique de l'huile : $\rho = 900\ kg/m^3$
- diamètre d'une goutte : $D = 4{,}1\ \mu m$
- intensité du champ de pesanteur : $g = 9{,}8\ m/s^2$

Réponses

a) C'est la force électrostatique qui empêche les gouttes de tomber.
La force électrostatique est donc dirigée vers le haut. La charge étant négative, force électrostatique et champ électrostatique sont de sens opposés. Le champ électrostatique est donc dirigé vers le bas. La plaque du haut est donc chargée positivement, celle du bas négativement.

b) A l'équilibre, la somme des forces qui s'applique sur une goutte est nulle.
Le poids est exactement compensé par la force électrostatique : $m\vec{g} + q\vec{E} = \vec{0}$
(m et q désignent la masse et la charge d'une goutte)

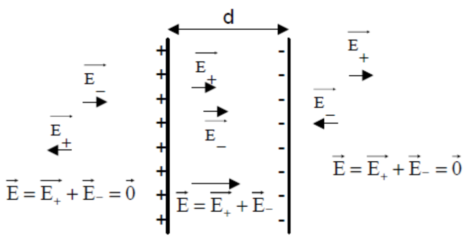
$$|q| = \frac{mg}{E} = \frac{mg\ell}{U} = \frac{\rho V g\ell}{U} = \frac{4\rho\pi R^3 g\ell}{3U} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-18}\,C$$

R est le rayon de la goutte ; $\ell = 1{,}5$ cm ; U = 3 kV.
V est le volume de la goutte de forme sphérique.
$q = -10\,e$: une goutte contient dix électrons excédentaires.

Bonus

Considérons deux plans parallèles distants de d.
Le premier plan est chargé positivement avec une densité surfacique de charge $+\sigma$ (en C/m²).
Le second plan est chargé négativement avec une densité surfacique de charge $-\sigma$.
Déterminer le champ électrostatique crée par les deux plans en un point quelconque de l'espace.

Réponse



$\vec{E}_+$ et $\vec{E}_-$ désignent respectivement les champs crées par le plan chargé positivement et le plan chargé négativement.
Entre les deux plans, le champ $\vec{E}$ est uniforme : c'est la somme de deux champs uniformes de même sens et de même intensité $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

$E = 2 \times \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ (indépendant de la distance entre les deux plans).

En dehors des deux plaques, le champ est nul car les champs crées par chaque plaque se compensent exactement.

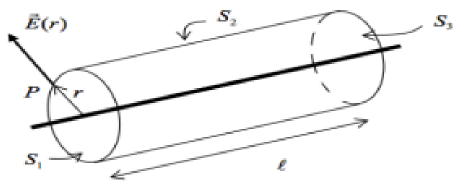
EXERCICE 8 : Champ électrique produit par un barreau rectiligne infini uniformément chargé **(cours)**

Soit λ la densité linéique de charge du barreau, mesurée en C/m.

Pour de raisons de symétrie le champ électrique doit être purement radial, c'est-à-dire être perpendiculaire en tout point de l'espace à l'axe du barreau. Son module ne dépend que de la distance r à l'axe du barreau. Considérons un cylindre de rayon r et de longueur l dont l'axe de symétrie coïncide avec l'axe du barreau.

Montrer que le champ électrique à une distance r d'un barreau rectiligne infini uniformément chargé est:

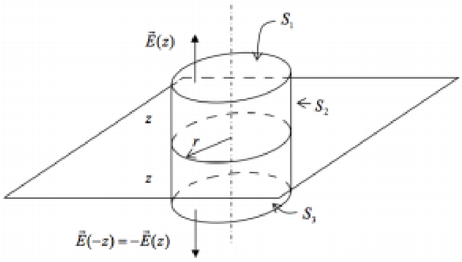
$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



EXERCICE 9 : Champ électrique produit par une plaque infinie uniformément chargée

Soit σ la densité surfacique de charge de la plaque,mesurée en C/m2.

Pour de raisons de symétrie, le champ électrique doit être perpendiculaire à la plaque. Son module ne peut dépendre que de la distance z à la plaque. Considérons un cylindre de rayon r et de hauteur 2z dont l'axe de symétrie est perpendiculaire à la plaque, comme schématisé ci- dessous.



Ou : Exercice9 : CPI version

Un plan infini (xOy) porte une distribution de charges surfaciques σ_0 positive et uniforme.

1) Etudier les symétries et les invariances de cette distribution et en déduire la direction et les variables dont dépend le champ et le potentiel créés en tout point M de l'espace.

2) En utilisant le théorème de Gauss, calculer le module du champ $\vec{E}(M)$.

3) En déduire le potentiel V(M) en tout point M. On prendra le potentiel nul dans le plan (xOy).

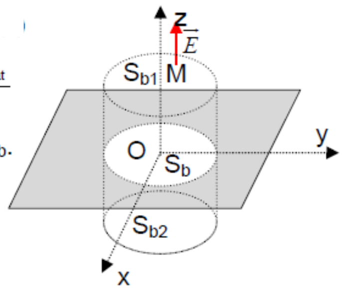
Réponse

1) Symétries et invariances : Tout plan passant par M et $\perp$ au plan (P) est plan de symétrie $\longrightarrow$

Symétrie axiale $\longrightarrow$ $\vec{E}(M)$ est // Oz $\Rightarrow \vec{E} = E_z(x, y, z)\,\vec{k}$

Plan infini : invariance par translation suivant Ox et suivant Oy donc $\vec{E}(M)$ ne dépend que de **z** :
$\vec{E}(x, y, z) = E_z(z)\,\vec{k}$. Le plan (P) est plan de symétrie $\longrightarrow \vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$

1ère méthode :



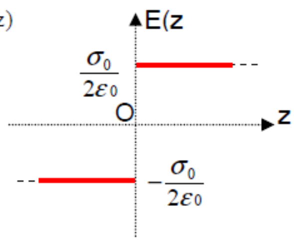
2) Calcul du champ $\vec{E}(M)$: Th. de Gauss : $\Phi_{(\vec{E}/SG)} = \oiint_{SG} \vec{E}.\vec{ds} = \dfrac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

Surf. de Gauss : Cylindre d'axe Oz , de hauteur h et de base $S_{b1} = S_{b2} = S_b$.

$\Phi = \iint_{S_{lat}} \vec{E}\cdot\vec{ds} + \iint_{Sb1} \vec{E}\cdot\vec{ds} + \iint_{Sb2} \vec{E}\cdot\vec{ds}$

- Sur (S_{lat}) : $\vec{E} \perp \vec{ds} \quad \Rightarrow \Phi_{(\vec{E}/S_{lat})} = 0$

- Sur (S_b) : $\vec{E} \,//\, \vec{ds} \quad \Rightarrow \Phi_{(\vec{E}/SG)} = \iint_{Sb1} E_z(z)\,ds + \iint_{Sb2} E_z(-z)(-ds) = 2\,S_b\,E_z(z)$



$\dfrac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma_0 S_b}{\varepsilon_0} = 2S_b E_z(z) \Rightarrow E_z(z) = \dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \vec{E} = \pm\dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{k}$

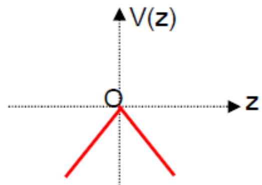
$\vec{E}(M)$ est uniforme et est discontinu à la traversé du plan chargé.

Il est non défini sur le plan chargé (**z=0**). La valeur de la discontinuité vaut $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

3) Le potentiel V(M) : $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\,V(M)$

$E_z = -\dfrac{dV}{dz}$ pour **z > 0** $\Rightarrow V(z) = -\int E_z(z)dz = -\dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}z + C$

Le potentiel est nul dans le plan (xOy) : $V(0) = 0 \Rightarrow V(z) = -\dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}z$



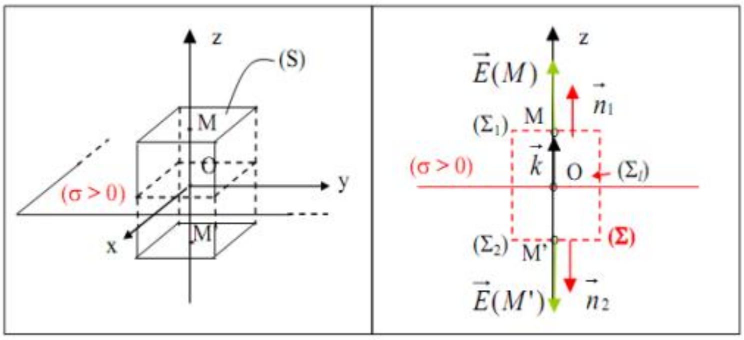
$$\begin{cases} \underline{z>0} \Rightarrow E(z) = \dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \;;\; V(z) = -\dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}z \\ \underline{z<0} \Rightarrow E(z) = -\dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \;;\; V(z) = \dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}z \end{cases}$$

Ces deux résultats peuvent être **condensés** sous la forme : $E(z) = \dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\dfrac{z}{|z|}$ $z \neq 0$; $V(z) = -\dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}|z|$

2ème méthode :

b) Calcul du champ électrostatique $\vec{E}(M)$

Tenant compte de la symétrie de la distribution plane de charge, nous choisissons comme surface fermée Σ le parallélépipède droit, dont les génératrices sont normales au plan chargé, fermé par deux sections droites notées Σ_1 et Σ_2 d'aire S, passant respectivement par M(x, y, z) et par M'(x, y, -z) le symétrique de M par rapport au plan xOy



Le flux $\vec{E}$ sortant de la surface latérale Σ_l du cylindre est nul, car en tout point de Σ_l,

$$\vec{E}.d\vec{\Sigma}_l = 0$$

Le flux sortant de Σ se réduit au flux sortant de Σ_1 et Σ_2 :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}.d\vec{\Sigma} = \iint_{\Sigma_1} \vec{E}(M).d\vec{\Sigma}_1 + \iint_{\Sigma_2} \vec{E}(M').d\vec{\Sigma}_2$$

$$\Phi = E(z)(\vec{k}.\vec{n}_1)\iint_{\Sigma_1} d\vec{S}_1 + E(-z)(\vec{k}.\vec{n}_2)\iint_{\Sigma_2} d\vec{S}_2$$

Avec, $(\vec{k}.\vec{n}_1) = 1$; $(\vec{k}.\vec{n}_2) = -1$ et $\iint_{\Sigma_1} d\vec{S}_1 = \iint_{\Sigma_2} d\vec{S}_2 = S$

$$\Phi = [E(z) - E(-z)]S \quad \text{avec} \quad E(-z) = -E(z)$$

$$\Phi = 2E(z)S$$

La charge à l'intérieure de la surface de Gauss est :

$$Q_{\text{int}} = \iint_S \sigma d\vec{S} = \sigma\, S$$

D'après le théorème de Gauss :

$$2E(z)S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

D'où le champ $\vec{E}$

- pour $z > 0$: $\vec{E} = +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k}$
- pour $z < 0$: $\vec{E} = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k}$

Ces deux résultats peuvent être condensés sous la forme :

$$\boxed{\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}\vec{k} \quad (z \neq 0)}$$

Ce résultat peut être retrouvé en choisissant comme surface de Gauss Σ la surface fermée formé par le cylindre droit, dont les génératrices sont normales au plan chargé, fermé par deux sections droites d'aire S, passant par M(x, y, z) et par M'(x, y, -z). **(1ère Méthode)**

c) Calcul du potentiel électrostatique V(M)

En choisissant l'origine des potentiels dans le plan xOy : V(z=0)=0

$$V(z) = \int_0^z dV = -\int_0^z \vec{E}.d\vec{l} \quad \text{avec,} \quad d\vec{l} = dz\vec{k}$$

Pour $z > 0$; $V(z) = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\displaystyle\int_0^z dz = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}z$

Pour $z < 0$; $V(z) = +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\displaystyle\int_0^z dz = +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}z$

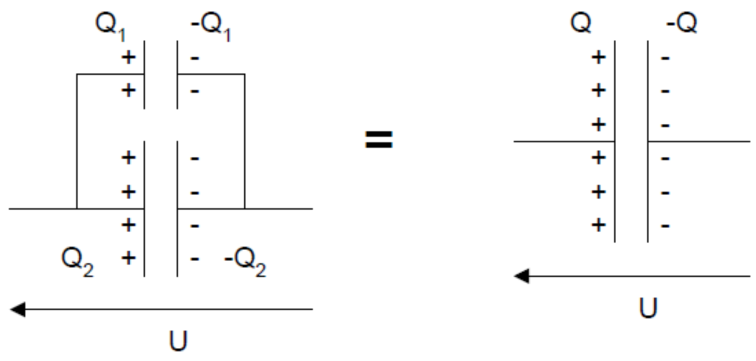
Soit,

$$V(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|z|$$

EXERCICE 10

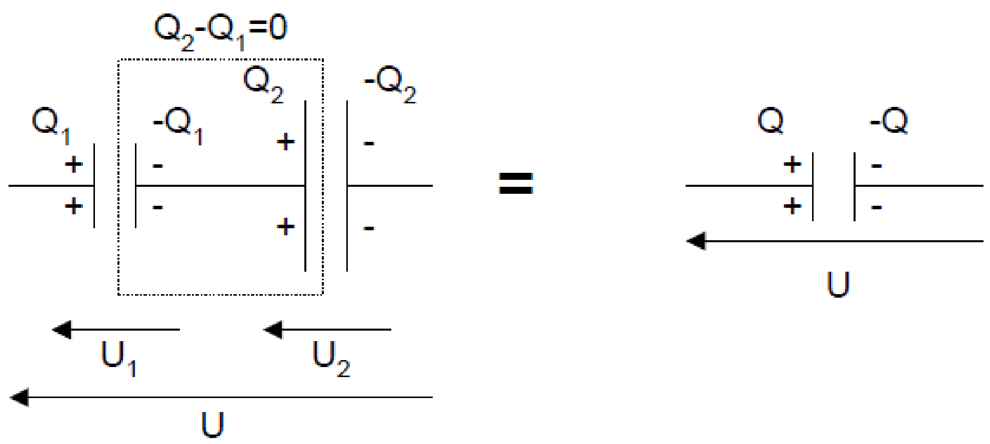
Montrer que pour des condensateurs branchés en parallèle les capacités s'additionnent. Montrer que pour des condensateurs branchés en série les inverses des capacités s'additionnent.

Réponses



$Q_1 = C_1U$
$Q_2 = C_2U$
$Q = C_{éq}U$

Il y a conservation de la charge : $Q = Q_1 + Q_2$
Donc : $C_{éq} = C_1 + C_2$



En série, tous les condensateurs ont la même charge : $Q = Q_1 = Q_2$
$U = U_1 + U_2$

$$\frac{Q}{C_{éq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

d'où : $$\frac{1}{C_{éq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

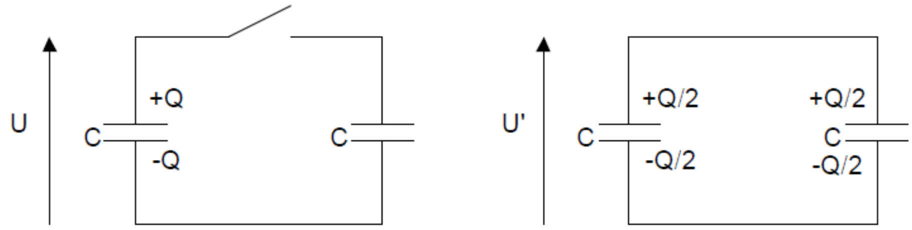
EXERCICE 11

Un condensateur de capacité C = 100 nF est chargé sous une tension U=20 V. On le relie à un condensateur de même capacité C, mais initialement déchargé.

a. Calculer la tension qui apparait aux bornes de l'ensemble.
b. Faire le bilan énergétique avant et après connexion. Commentaire ?

Réponses

a) La charge initiale Q va se répartir, après liaison, de la façon suivante :



$Q/2 = C\,U'$
Tension qui apparaît aux bornes de l'ensemble : $U' = Q/(2C) = U/2 = 10\ V$

b) Bilan énergétique

Avant liaison : $W = \frac{1}{2}CU^2 + 0 = 20\,\mu J$

Après liaison : $W' = \frac{1}{2}CU'^2 + \frac{1}{2}CU'^2 = \frac{W}{2} = 10\,\mu J$

Commentaire : il « manque » 10 µJ.
Cette énergie n'a pas disparu !
Lors de la liaison, le courant de décharge crée un champ électromagnétique : 10 µJ sont donc rayonnée (à la manière d'une antenne émettrice).
Pour s'en convaincre, il suffit de placer un récepteur radio à proximité du dispositif.
On entend un craquement, caractéristique de la réception d'une onde électromagnétique (pour les mêmes raisons, on peut « entendre » la foudre à la radio).