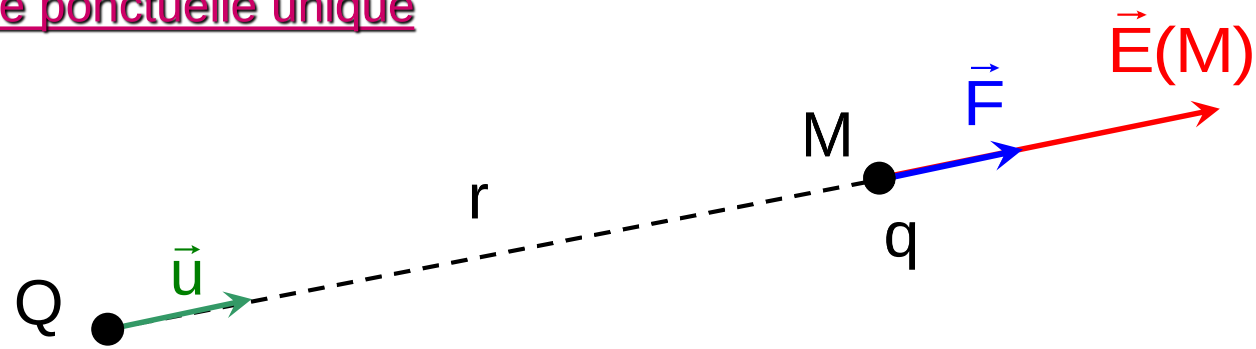
CHAPITRE 2

Rappel + Théorème de Gauss

I- Rappel

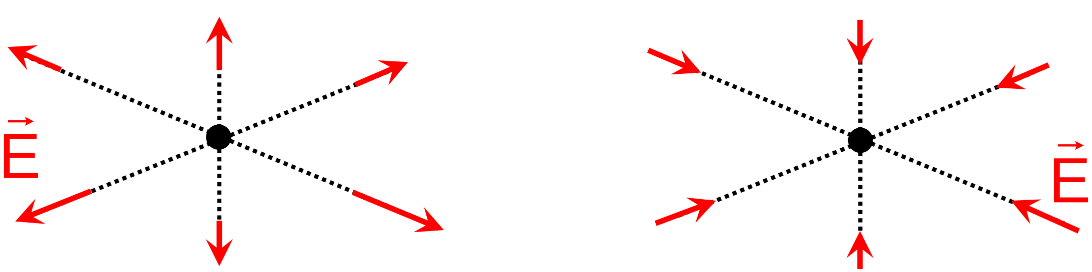
1- Charge ponctuelle unique



□ La charge Q crée en M un champ $\vec{E}(M)$ tel que:

$$\vec{F}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\,\vec{u} = q\,\vec{E}(M) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\vec{u}}$$

➔ $\vec{E}(M)$ est un champ radial:



$Q > 0$ $\qquad$ $Q < 0$

- Champ créé par plusieurs charges ponctuelles:

$\rightarrow$ application du principe de superposition:

$$\vec{E}_i(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i}{r_i^2}\,\vec{u}_i \qquad \text{et} \qquad \vec{E}(M) = \sum_i \vec{E}_i(M)$$

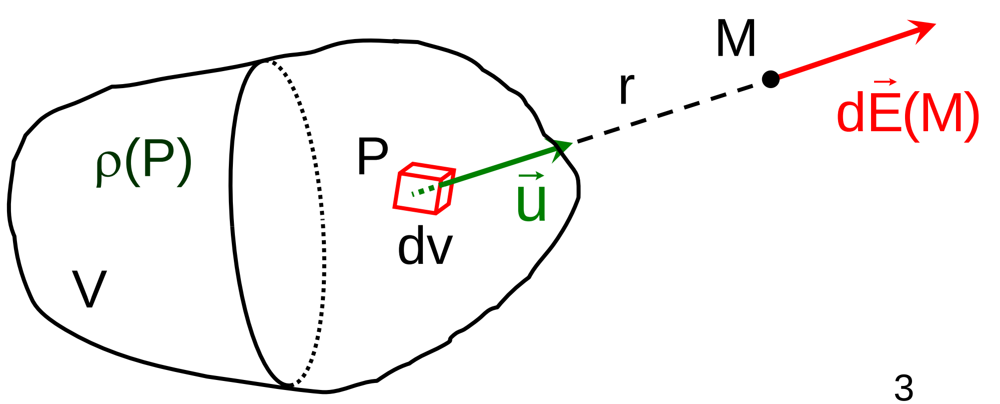
2- Champ créé par une distribution continue

- Distribution volumique de charges de densité $\rho(P)$

$\rightarrow$ Le volume élémentaire dv porte une charge $dq = \rho(P)\,dv$

$\rightarrow$ en M, le champ élémentaire créé par dq est alors:

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\,\vec{u}$$



$\rightarrow$ champ total $\vec{E}(M)$ dû à toutes les charges du volume V :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(P).dv}{r^2}\, \vec{u}}$$

- Distribution surfacique de charges de densité $\sigma(P)$

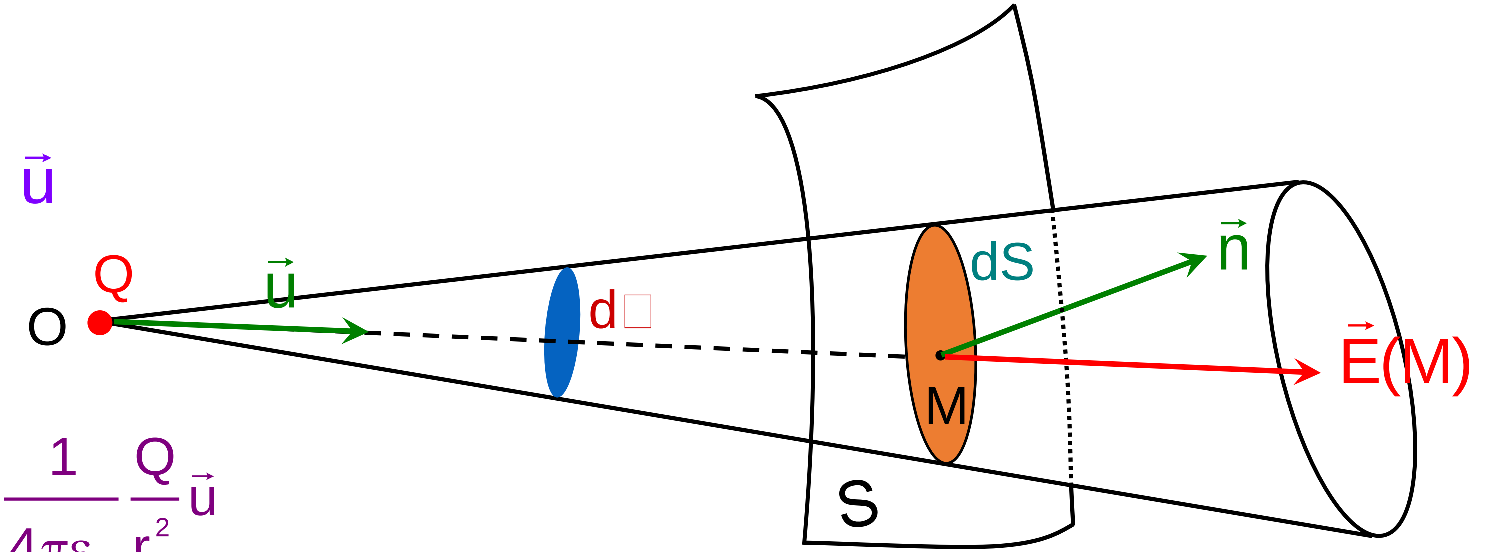
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(P).ds}{r^2}\, \vec{u}$$

- Distribution linéique de charges de densité $\lambda(P)$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_l \frac{\lambda(P).dl}{r^2}\, \vec{u}$$

2- Flux du champ électrostatique à travers une surface élémentaire.

- $\overrightarrow{OM} = r\ \vec{u}$



- $\vec{E}(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{Q}{r^2} \vec{u}$

- Flux élémentaire de $\vec{E}$ à travers dS: $\quad d\Phi_{\vec{E}/dS} = \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}$

3- Théorème de GAUSS

Le flux du champ électrostatique, créé par une distribution quelconque de charges, à travers une surface fermée S, est égal à la charge intérieure à cette surface divisée par ε_0.

★ S est appelée surface de Gauss. Elle est purement géométrique et choisie arbitrairement en fonction des symétries du système de charges étudié. S ne doit pas comporter de charges.

★ $\sum Q_{int}$ est la somme de TOUTES les charges contenues à l'intérieur de S.

★ $\vec{E}$ est le champ électrostatique TOTAL dû à TOUTES les charges présentes (intérieures et extérieures à S).

Expression du théorème de Gauss

- Soit un volume V chargé avec une densité de charges ρ(M) et S la surface fermée délimitant V.

- Théorème de Gauss:

$$\Phi_{\vec{E}/S} = \iint_S \vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\iiint_V \rho(M) \cdot dv}{\varepsilon_0}$$

SYMETRIE DU CHAMP ELECTROSTATIQUE

1- Principe de Curie:

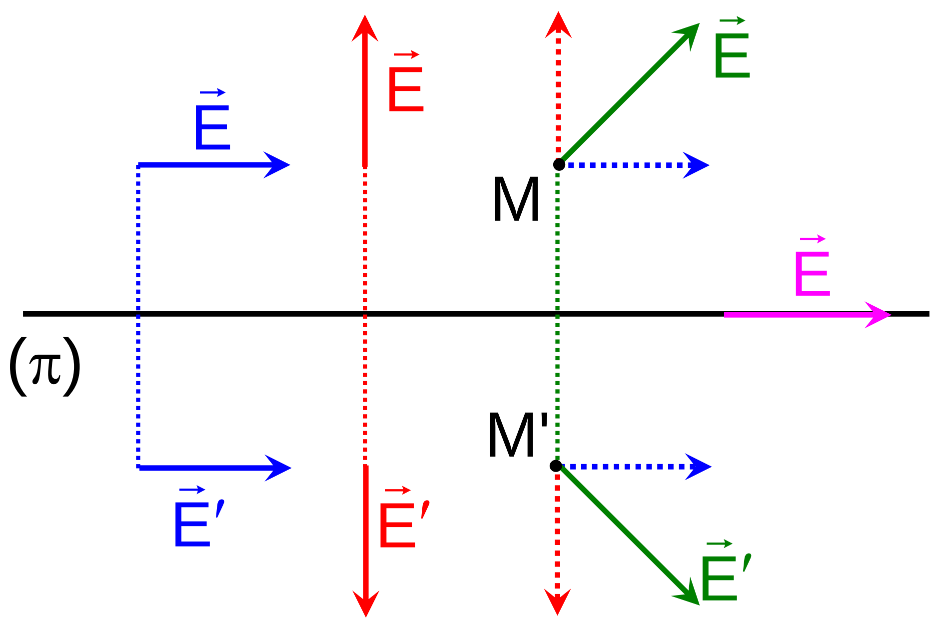
" Les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits"

- Si un système physique possède des **symétries**, toute grandeur physique produite par ce système aura au minimum toutes ces symétries.

1- Plan de symétrie

→ (π) plan de symétrie d'une distribution de charges.

→ $\vec{E}'$ symétrique de $\vec{E}$ par rapport à (π).



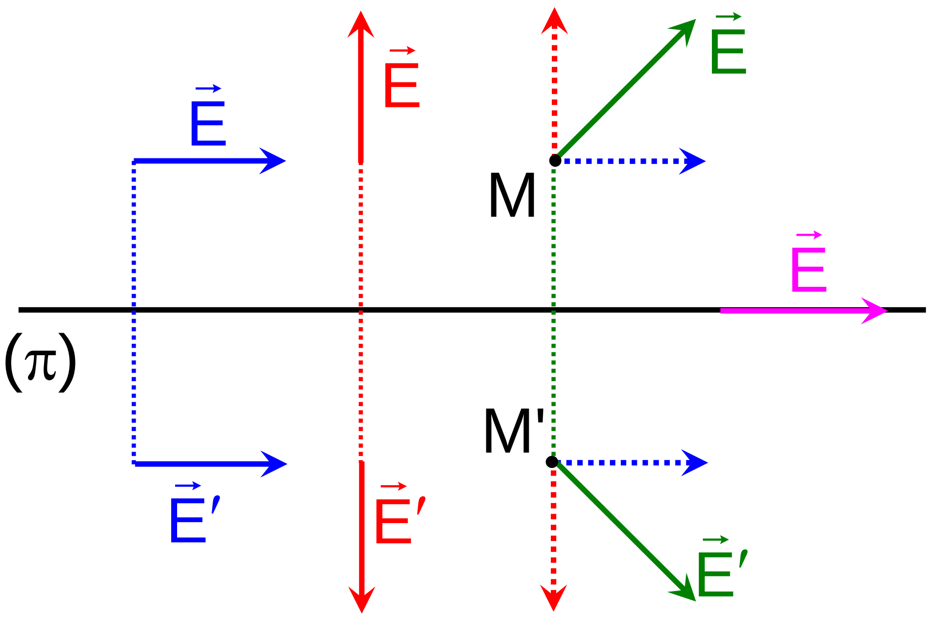
➔ Lorsqu'une distribution de charges est symétrique par rapport à un plan, le potentiel et le champ électrostatique qu'elle crée sont symétriques par rapport à ce plan.

➔ Le champ électrostatique créé sur un plan de symétrie des charges est contenu dans ce plan.

1- Plan de symétrie

$\rightarrow$ (π) plan de symétrie d'une distribution de charges.

$\rightarrow$ $\vec{E}'$ symétrique de $\vec{E}$ par rapport à (π).



➔ Lorsqu'une distribution de charges est symétrique par rapport à un plan, le potentiel et le champ électrostatique qu'elle crée sont symétriques par rapport à ce plan.

➔ Le champ électrostatique créé sur un plan de symétrie des charges est contenu dans ce plan.

➔ **Axe de symétrie:**

$=$ intersection de 2 ou plusieurs plans de symétrie

$\Rightarrow \vec{E} \in$ à tous ces plans

- Le champ électrostatique créé sur l'axe de symétrie d'une distribution de charges est porté par cet axe.

➔ **Centre de symétrie:**

$=$ intersection de 2 ou plusieurs axes de symétrie

$\Rightarrow \vec{E} \in$ à tous ces axes $\Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$ en ce point

- Le champ électrostatique créé au centre de symétrie d'une distribution de charges est nul.

- $\vec{E}$ est radial.

3- Règles de symétrie

➔ Invariance par translation / axe (Ox, Oy, ou Oz)

$\rightarrow$ effets indépendants de x, y ou z.

➔ Invariance par rotation / Oz (symétrie axiale)

$\rightarrow$ effets indépendants de θ: $\vec{E}(M) = \vec{E}(\rho, z)$

➔ Invariance par translation / Oz et par rotation / Oz

(symétrie cylindrique).

$\rightarrow$ effets indépendants de θ et de z: $\vec{E}(M) = \vec{E}(\rho)$

➔ Invariance par toute rotation autour du point O

(symétrie sphérique).

$\rightarrow$ effets indépendants de θ et de φ: $\vec{E}(M) = \vec{E}(r)$

MÉTHODOLOGIE GÉNÉRALE

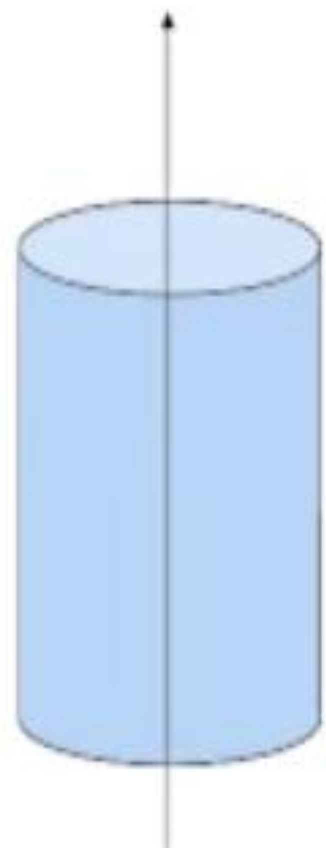
- Détermination des symétries de la distribution
- Détermination des invariances de la distribution
  - Simplification de l'expression du champ…
  - … et choix de la surface fermée

- Application du théorème de Gauss
- Intégration en fonction de la surface choisie
- <u>Expression du champ électrique</u>

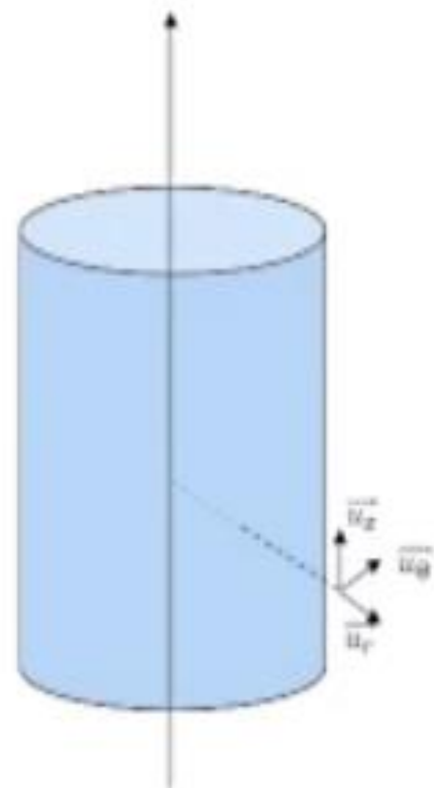
CHOIX DU MODÈLE ET RAPPELS

Le cylindre infini

CHOIX DU MODÈLE ET RAPPELS



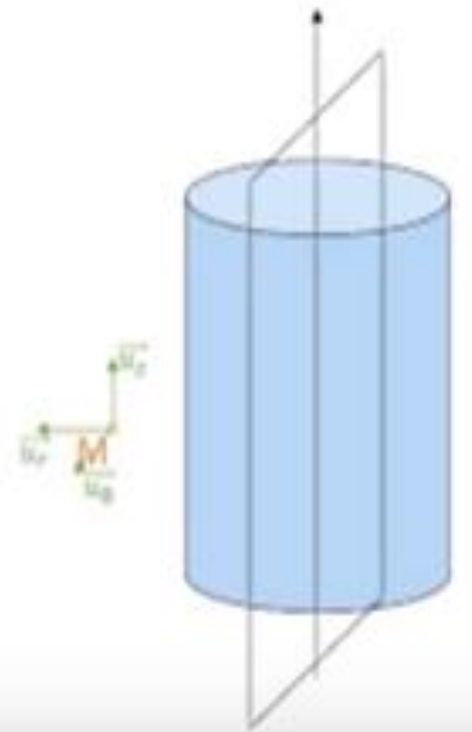
CHOIX DU MODÈLE ET RAPPELS



MÉTHODOLOGIE APPLIQUÉE

- Détermination des <u>symétries</u> de la distribution

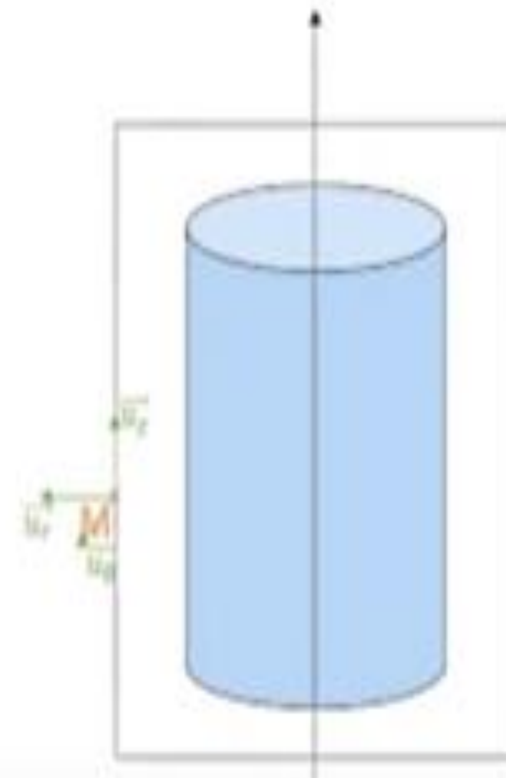
$$\vec{E} = E(r, \theta, z)\overrightarrow{u_r u_\theta u_z}$$



MÉTHODOLOGIE APPLIQUÉE

- Détermination des <u>symétries</u> de la distribution

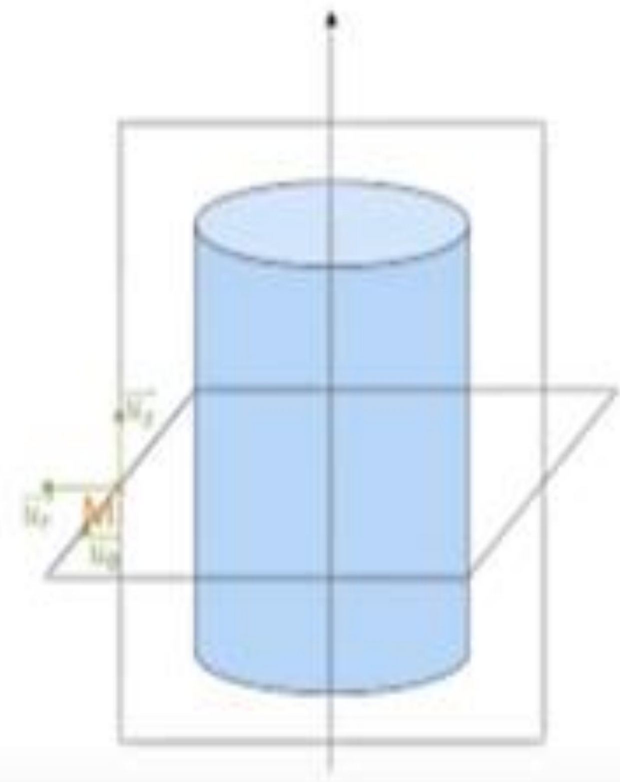
$$\vec{E} = E(r,\theta,z)\overrightarrow{u_r u_\theta u_z}$$



MÉTHODOLOGIE APPLIQUÉE

- Détermination des <u>symétries</u> de la distribution

$$\vec{E} = E(r,\theta,z)\overrightarrow{u_r u_\theta u_z}$$

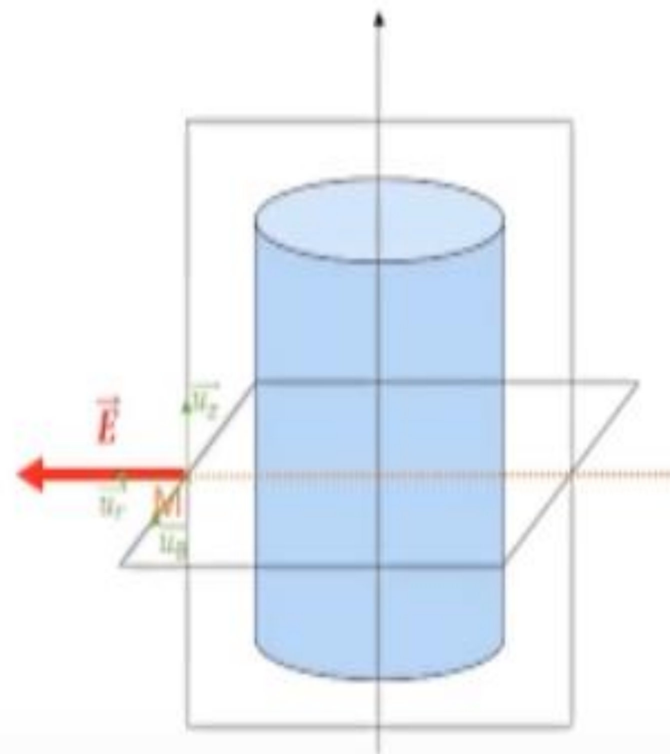


MÉTHODOLOGIE APPLIQUÉE

➢ Détermination des <u>symétries</u> de la distribution

$$\vec{E} = E(r, \theta, z)\overrightarrow{u_r u_\theta u_z}$$

- En tout point d'un plan de symétrie, le champ électrique appartient à ce plan



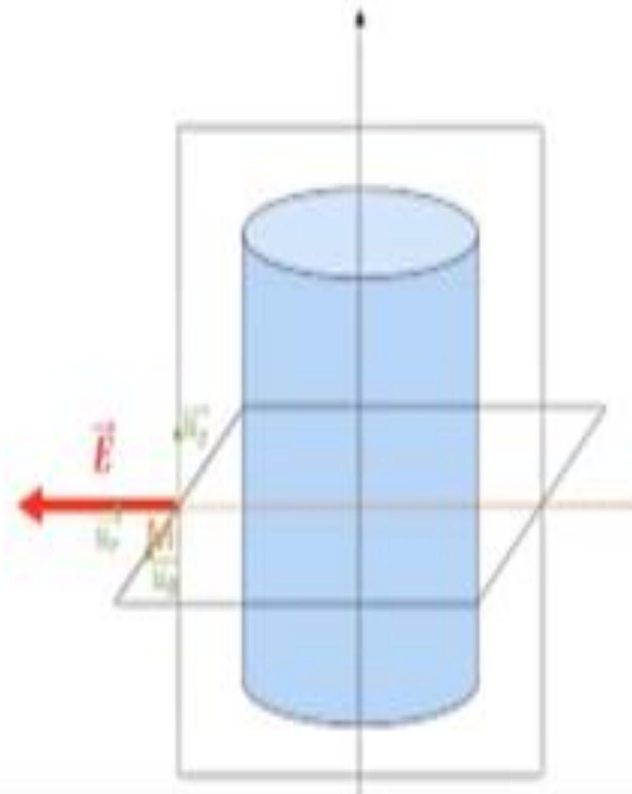
MÉTHODOLOGIE APPLIQUÉE

➢ Détermination des <u>symétries</u> de la distribution

$$\vec{E} = E(r,\theta,z)\overrightarrow{u_r u_\theta u_z}$$

- En tout point d'un plan de symétrie, le champ électrique appartient à ce plan

$$\vec{E} = E(r,\theta,z)\overrightarrow{u_r}$$



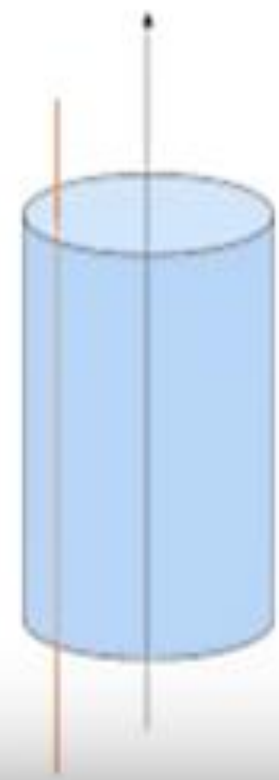
MÉTHODOLOGIE APPLIQUÉE

- Détermination des invariances de la distribution

$$\vec{E} = E(r,\theta,z)\overrightarrow{u_r}$$

- Invariance par translation

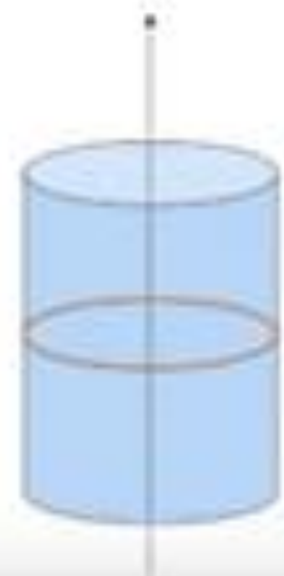
$$\vec{E} = E(r,\theta)\overrightarrow{u_r}$$



MÉTHODOLOGIE APPLIQUÉE

- Détermination des <u>invariances</u> de la distribution

$$\vec{E} = E(r,\theta,z)\vec{u_r}$$



- Invariance par translation

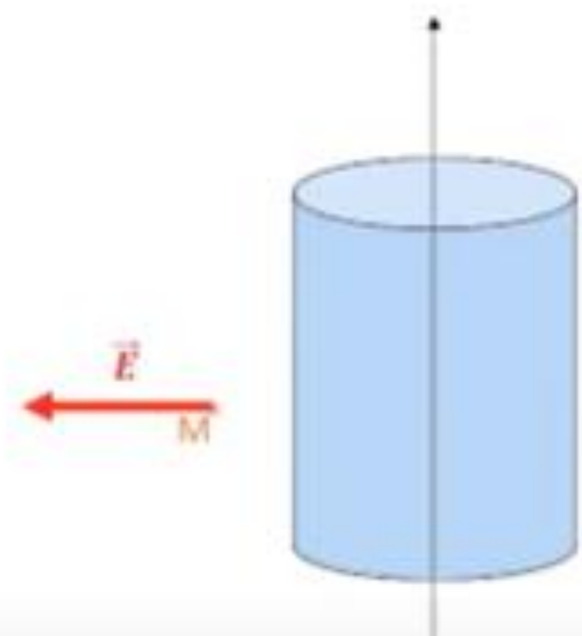
$$\vec{E} = E(r,\theta)\vec{u_r}$$

- Invariance par rotation

$$\vec{E} = E(r)\vec{u_r}$$

MÉTHODOLOGIE APPLIQUÉE

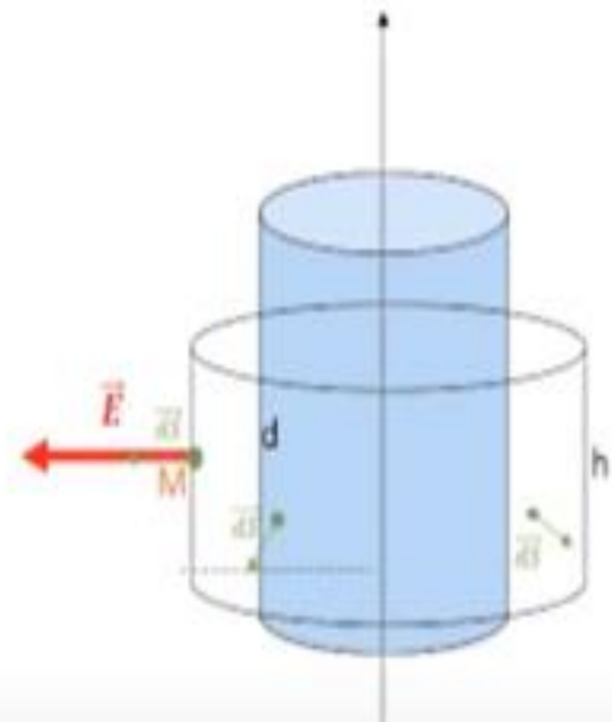
- Choix de la surface fermée



MÉTHODOLOGIE APPLIQUÉE

- Choix de la surface fermée

- $\vec{E}//\overrightarrow{dS}$
- $\vec{E}$ est constant sur toute la surface



MÉTHODOLOGIE APPLIQUÉE

- Application du théorème de Gauss

$$\oiint \vec{E}\,.\overrightarrow{dS} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$\vec{E}$ est constant sur toute la surface

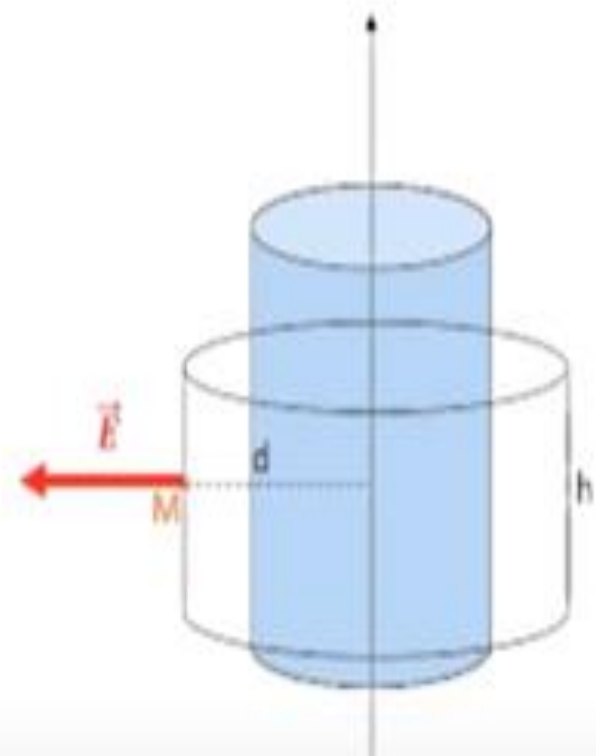
$$E \oiint \overrightarrow{dS} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Intégration de $\overrightarrow{dS}$

$$E \times 2\pi d h = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

La charge intérieure

$$E \times 2\pi d h = \frac{\rho \times \pi r^2 \times h}{\varepsilon_0}$$



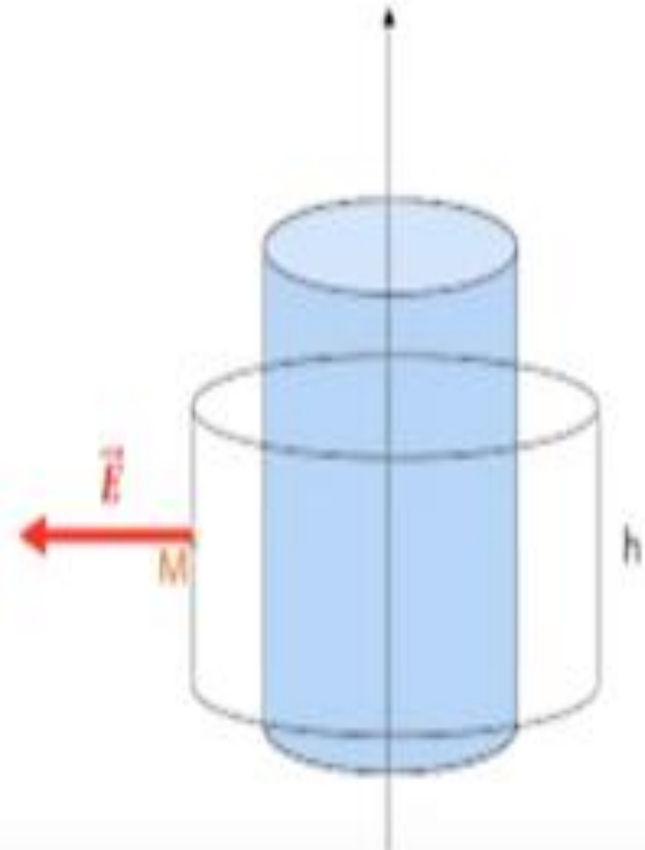
MÉTHODOLOGIE APPLIQUÉE

- Expression du champ électrique

$$E \times 2\pi d h = \frac{\rho \times \pi r^2 \times h}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho \times \pi r^2 \times h}{2\pi d h \times \varepsilon_0}$$

$$\boldsymbol{E = \frac{\rho r^2}{2d\varepsilon_0}}$$



MÉTHODOLOGIE APPLIQUÉE

➤ Application du théorème de Gauss

$$\oiint \vec{E}\,.\,\overrightarrow{dS} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$\vec{E}$ est constant sur toute la surface

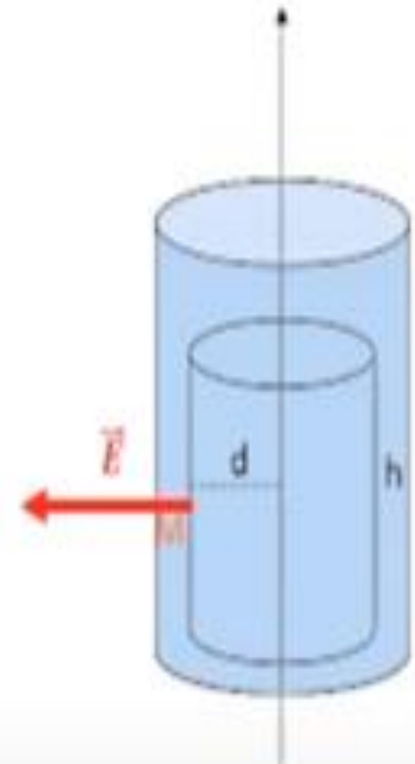
$$E \oiint \overrightarrow{dS} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Intégration de $\overrightarrow{dS}$

$$E \times 2\pi dh = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

La charge intérieure

$$E \times 2\pi dh = \frac{\rho \times \pi d^2 \times h}{\varepsilon_0}$$



MÉTHODOLOGIE APPLIQUÉE

- Application du théorème de Gauss

$$E \times 2\pi dh = \frac{\rho \times \pi d^2 \times h}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho \times \pi d^2 \times h}{2\pi dh \times \varepsilon_0}$$

$$\boldsymbol{E = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}}$$