TD Chapitre 3 : Fonctions réelles :

I- *Monotonie :*

Exercice 1 :

Montrer que la fonction *partie entière* $E : x \longmapsto E(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

(Utiliser la définition d'une fonction croissante vue en cours)

Exercice 2 :

a) Montrer que la fonction sinus est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (sans utiliser de dérivée).

b) Montrer que la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

Exercice 3 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ est croissante tandis que $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante.

Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 4 :

Soit la fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. On rappelle la définition suivante :

f est strictement croissante si et seulement si : $\forall x, x' \in D, x < x' \Longrightarrow f(x) < f(x')$.

Montrer que la réciproque, elle aussi, est vraie.

II- *Domaines de définition :*

Exercice 5 :

Soient deux fonctions $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $f(D) \subset D'$.

Quel est le domaine de définition de la fonction $f \circ g$?

Exercice 6 : ancien exercice 4

Trouver D_h, f et g puis définissez la fonction $g \circ f$ pour les fonctions $\boldsymbol{h}$ définies par les relations suivantes:

a) $h(x) = g \circ f(x) = \sqrt{\frac{2-3x}{6+5x}}$; ***b)*** $h(x) = g \circ f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$;

c) $h(x) = g \circ f(x) = \ln(2x - 7)$ ***d)*** $h(x) = g \circ f(x) = \ln(\tan(x))$;

e) $h(x) = g \circ f(x) = \tan\left(e^{x^2}\right)$

Attention: définir une fonction f revient à définir 3 choses : ses ensembles de départ et d'arrivée et la valeur de $f(x)$.

Exercice 7 :

Soient deux fonctions réelles f et g, avec leurs deux domaines de définition respectifs D_f et D_g et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Quels sont les domaines de défitions des fonctions $\alpha.f$, $\alpha.f + \beta.g$, $f.g$?

Quels sont les domaines de définition des fonctions $\frac{1}{f}$ et $\frac{f}{g}$ (si elles existent) ?

III- Majoration - Minoration :

Exercice 8 : ***Proposition***

Soit f une fonction réelle. Montrer que f est bornée $\Leftrightarrow |f|$ est majorée.

Exercice 9 : ***Proposition***

Soient $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ deux fonctions bornées. Montrer que $\lambda.f$, $f + g$ et $f.g$ le sont aussi.

Exercice 10 :

a) Montrer que la fonction qui, à x associe $\frac{x}{1+x^2}$, est bornée sur $\mathbb{R}$.

b) Etudier la variation de cette fonction (sans utiliser de dérivée) et tracer son graphique.

IV- Surjectivité, injectivité, bijectivité :

Exercice 11 : ancien exercice 6

Soit la fonction $\begin{aligned} f_1 : [0,\pi] &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto sin(x) \end{aligned}$. Est-elle injective, surjective, bijective ?

Même question pour les fonctions $\begin{aligned} f_2 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow [-1,1] \\ x &\longmapsto sin(x) \end{aligned}$ et $\begin{aligned} f_3 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow [-1,1] \\ x &\longmapsto sin(x) \end{aligned}$.

Exercice 12 :

a) Montrer que la fonction $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3.e^x + 2 \end{aligned}$ est injective. Est-elle bijective ?

b) Montrer que la fonction $\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ln(x) + sin(x) \end{aligned}$ n'est pas injective.

Exercice 13 :

Montrer que la fonction $\begin{aligned} a : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{N}^* \\ k &\longmapsto |k| + 2 \end{aligned}$ est surjective.

Exercice 14 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle strictement croissante. Montrer que f est injective.

V- Parité :

Exercice 15 :

Soient deux fonctions $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi: D' \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(D) \subset D'$. Monter que :

a) si f est paire, alors $\varphi \circ f$ l'est aussi.

$$\left.\begin{array}{l}\text{b) si } f \text{ est impaire et } \varphi \text{ paire, alors } \varphi \circ f \text{ est paire} \\ \text{c) si } f \text{ est impaire et } \varphi \text{ impaire, alors } \varphi \circ f \text{ est impaire}\end{array}\right\} \text{même parité que } \varphi.$$

Exercice 16 :

Montrer que :

- Toute somme finie de fonctions paires est une fonction paire.
- Toute somme finie de fonctions impaires est une fonction impaire.
- Si f et g ont la même parité, alors leur produit $f.g$ est une fonction paire.
- Si f et g n'ont pas la même parité, alors leur produit $f.g$ est une fonction impaire.

Exercice 17 :

Montrer que toute fonction f peut être décomposée en une somme d'une fonction paire et une fonction impaire.

Exercice 18 :

Donner le domaine de définition et étudier la parité de la fonction f définie par : $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$.

VI- Périodicité :

Exercice 19 : ***Proposition***

a) Soient f et g deux fonctions T-périodiques et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Montrer que les fonctions $\alpha.f + \beta.g$ et $f.g$ sont T-périodiques.

b) Soit f une fonction T-périodique. Montrer que $\frac{1}{f}$, si elle existe, est T-périodique.

c) Montrer que si f est une fonction T-périodique et g une fonction telle que $g \circ f$ est bien définie, alors $g \circ f$ est T-périodique.

Exercice 20 :

Soit E la fonction *partie entière.*

a) Montrer que la fonction *partie décimale* $D : x \longmapsto x - E(x)$ est 1-périodique sur $\mathbb{R}$.

b) Tracer le graphique de la fonction D.

Exercice 21 :

a) Montrer que la fonciton $g(x) = (-1)^{E(x)}$ définie sur $\mathbb{R}$ est périodique et donner sa période.

b) Tracer le graphique de la fonction g.

Exercice 22 :

a) Soit $\alpha > 0$. Montrer que la fonction $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] \\ x \longmapsto cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) \end{array}$ est $2\pi\alpha$ –périodique.

b) Soit $\alpha > 0$. Quelle est la période de la fonction $\begin{array}{l} g : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] \\ x \longmapsto |sin(\alpha x)| \end{array}$?

VII- $Sup(f,g), inf(f,g), f^+, f^-$:

Exercice 23 :

Définition 1 : Soient $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$. On définit les fonctions $\boldsymbol{h} = \mathbf{sup}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g})$ et $\boldsymbol{k} = \mathbf{inf}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g})$ sur D par :

$$\forall x \in D, \ \ h(x) = max\big(f(x), g(x)\big)$$
$$et \ \ k(x) = \min\big(f(x), g(x)\big)$$

1) Tracer les graphiques d'un exemple de fonctions f et g.

Définition 2 : Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$. On définit les fonctions $\boldsymbol{f}^+ = \mathbf{sup}(\boldsymbol{f}, \mathbf{0})$ et $\boldsymbol{f}^- = \mathbf{inf}(\boldsymbol{f}, \mathbf{0})$, "0" étant ici la fonction nulle.

2.a) Tracer les graphiques d'un exemple de fonctions f, f^+ et f^-.

2.b) Montrer que $f^+ \geq 0$ et $f^- \leq 0$.

2.c) Montrer que $f = f^+ + f^-$ et $|f| = f^+ - f^-$.

VIII- Fonctions lipschitziennes :

Exercice 24 : ***Proposition***

Soient $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

a) Montrer que si f est une fonction k-lipschitzienne, alors $\forall x' \geq k$, f est aussi k'-lipschitzienne.

b) Montrer que si f est une fonction k-lipschitzienne, alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda . f$ est $|\lambda|k$-lipschitzienne.

c) Montrer que si f et g sont respectivement k et k'-lipschitziennes, alors la fonction $f + g$ est lipschitzienne. Préciser la constante de "lipschitzianité".

Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(D) \subset D'$.

d) Montrer que si f et g sont respectivement k et k'-lipschitziennes alors $\varphi \circ f$ est $k.k'$-lipschitzienne.

Exercice 25 :

a) Montrer que les fonctions constantes sont toutes 0-lipschitziennes.
b) Montrer que les fonctions "identité" et "valeur absolue" sont 1-lipschitziennes.

Exercice 26 :

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, |sin(x)| \leq |x|$.
b) En déduire que la fonction sinus est lipschitzienne.

Exercice 27 :

Montrer que la fonction qui à x associe x^2 n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.