TD Chapitre 1 : Nombres réels :

I- Equations et inéquations :

Exercice 1 : ***Incontournable***

Comparer sans calculatrice :

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ et 0,5 ; $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et 1 ; $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et 2

Exercice 2 : ***Incontournable***

Si $a \leq b$ et $c \leq d$, compléter avec c ou d l'inégalité suivante : $\frac{a}{\dots} \leq \frac{b}{\dots}$ (distinguer plusieurs cas).

Si $0 \leq a \leq b$ et $c \leq d \leq 0$, comparer ad et bc.

Exercice 3 : ***Incontournable***

Soient x et y deux réels.

Sachant que $3 < x < 5$, que peut-on en conclure pour $\frac{1}{3-x}$?

Sachant que $\begin{cases} -2 < x < 3 \\ -4 < y < -1 \end{cases}$, encadrer $x - y$

Sachant que $\begin{cases} 8 < x < 9 \\ 3 < y < 4 \end{cases}$, encadrer x/y

Sachant que $\begin{cases} -2 < x < -1 \\ 2 < y < 3 \end{cases}$, encadrer x/y

Sachant que $\begin{cases} -2 < x < 3 \\ -7 < y < -5 \end{cases}$, encadrer x^2 et $\frac{x^2}{y^2-x^2}$

Exercice 4 :

Montrer que pour tout $x > 1$, $\frac{1}{x} < \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Montrer que si $x < 1$ alors $\frac{x-8}{2x-9} < 1$

Exercice 5 :

Soient a et b / a et $b \leq 3$ et $a < b$.

Comparer $(2a-6)^2$ et $(2b-6)^2$

Exercice 6 : ***Incontournable***

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$|x+3\sqrt{2}|=3$; $|x-3|=|x+1|$; $x^2+x+1=0$; $x^3-4x^2+4x-1=0$

Exercice 7 : ***Incontournable***

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$|2x-1|\geq 3$; $|3x+4|\leq 7$; $\left|\frac{x+2}{x-3}\right|\leq 4$; $\left|\frac{2x+1}{x+7}\right|\geq 10$;

$(2x+1)(x+2)\leq 0$; $\frac{2x+1}{x+2}\leq 0$; $1\leq\sqrt{3x^2-2}\leq 2$; $|x+2|>\sqrt{3}$;

$|x-8|<5$; $|2x-11|<|x-5|$; $0\leq\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+2}\leq 1$

Exercice 8 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$\left|\frac{1}{x}-2\right|\leq 3$

$\sqrt{3x+1}-x>0$

$e^{3x}-6e^{2x}=6-11e^{x}$

$\ln(x-1)+\ln(x+1)-2\ln(x)=0$

$\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[6]{1-x^2}$

II- Inégalités et valeurs absolues :

Exercice 9 : ***Incontournable***

Montrer que $\forall x,y\in\mathbb{R}$,

$|x+y|\leq|x|+|y|$ (1ère inégalité triangulaire)

$\big||x|-|y|\big|\leq|x-y|$ (2ème inégalité triangulaire)

$|x|\geq\big||x+y|-|y|\big|$

Exercice 10 :

Soient $x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$

Montrer que $|x_1+x_2+\cdots+x_n|\leq|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$

Quand est-ce qu'il y a égalité ?

Exercice 11 :

Soient $x,y\in[0,1]$. Montrer que $x^2+y^2-xy\leq 1$.

Exercice 12 : ***Incontournable***

Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$; $\quad |ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$; $\quad 2\sqrt{ab} \leq a + b$

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \ x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$

III- Calculs et fonctions :

Exercice 13 :

Soit $a \geq 1$. Simplifier : $\sqrt{a + 2\sqrt{a - 1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a - 1}}$

Exercice 14 :

Soit $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

a) On suppose f constante égale C quelle est la valeur de C ?
On revient au cas général.
b) Calculer $f(0)$.
c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q}, f(-x) = -f(x)$.
d) Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{Q}, f(nx) = nf(x)$ et généraliser cette propriété à $n \in \mathbb{Z}$.
e) On pose $a = f(1)$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = ax$.

IV- Partie entière :

Exercice 15 :

Montrer que la fonction *partie entière* $E : x \longrightarrow E(x)$ est croissante.

Exercice 16 : ***Incontournable***

Soit x un réel.

Montrer que $E(x + 1) = E(x) + 1$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, E(x + n) = E(x) + n$

Exercice 17 : ***Incontournable***

Soit la fonction *partie entière* $E : x \longrightarrow E(x)$.

1) Comparer $E(x + y)$ et $E(x) + E(y)$

2) Comparer $E(x.y)$ et $E(x).E(y)$

Indication : dans le cas $x < 0$ et $y \geq 0$, montrer que :

$$E(x).E(y) + E(x) \leq E(x.y) \leq E(x).E(y) + E(y)$$

Exercice 18 :

Soit $x > 0$ un réel. Encadrer $\frac{E(x)}{x}$. Quelle est la limite de $\frac{E(x)}{x}$ lorsque $x \to +\infty$?

Exercice 19 :

Si x est un nombre réel, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière, qui est (par définition) l'unique entier relatif satisfaisant la double inégalité :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

1. Déterminer les valeurs suivantes : $\lfloor 1.5 \rfloor$, $\lfloor -1.5 \rfloor$, $\lfloor \pi \rfloor$, $\lfloor 0 \rfloor$.
2. Représenter graphiquement la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ entre -3 et 3.
3. Donner un encadrement de $\lfloor x \rfloor$ en fonction de x.
4. Les assertions suivantes sont-elles vraies ? Si oui, les démontrer, sinon, donner un contre-exemple.
   (a) Pour tout réel x, $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$;
   (b) Pour tout réel x, $\dfrac{\lfloor 2x \rfloor}{2} = \lfloor x \rfloor$;
   (c) Pour tout réel x et tout entier n strictement positif, $0 \leq \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor \leq n-1$

V- *Maximum, minimum, borne supérieure*

Exercice 20 : *Incontournable*

Le maximum de deux nombres x, y est noté $max(x, y)$. De même on note $min(x, y)$ le plus petit des deux nombres x et y. Démontrer que :

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \text{ et } \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$$

Trouver une formule pour $\max(x, y, z)$.

Exercice 21 : *Incontournable*

On considère le sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ défini par :

$$A = \left\{\frac{x - y}{x + y + 3}; x \in [-1, 1], y \in [-1, 1]\right\}$$

Trouver un majorant et un minorant de A.