Pr. Morad LAKHSSASSI

1. Un peu de logique :

المنطق

Soient A et B deux propositions.

ليكن عبارات

$A \Rightarrow B$: A implique B ou si A, alors B.

تستلزم

$A \Leftrightarrow B$: A est équivalente à B

تكافئ

$A \Leftrightarrow B$ si et seulement si $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$

إذا وفقط إذا

(ssi)

Exemple 1 :

A : je dors tard

B : je suis fatigué

$A \Rightarrow B$ mais $B \not\Rightarrow A$ (B n'implique pas A)

Exple 2 :

A : j'ai la mention T. Bien au bac.

B : j'ai une moyenne ≥ 16

$A \Leftrightarrow B$ (car $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$)

Exple 3 :

A : j'ai la mention Bien ~~au~~ bac

B : j'ai une moyenne ≥ 14

$A \Rightarrow B$ mais $B \not\Rightarrow A$

Pr. M. LAKHSSASSI

Exple 4 :

$A : x \geq 2$

$B : x > 1$

On a toujours $A \Rightarrow B$

si $x \in \mathbb{Z}$, $B \Rightarrow A$ d'où $A \Leftrightarrow B$

si $x \in \mathbb{R}$, $B \not\Rightarrow A$

Exple 5 :

$A : 2x + 3 = 4$

$B : x = \frac{1}{2}$

$A \Leftrightarrow B$ (car $\Rightarrow$ et $\Leftarrow$ justes)

donc l'ensemble des solutions de l'équation $2x+3 = 4$ est $S = \{\frac{1}{2}\}$

Remarque : Pour résoudre une équation il faut qu'il y ait équivalence entre les solutions et l'équation. Pareil pour les inéquations.
(sinon on ne peut dire qu'on a résolu l'équation / l'inéquation)

Pr. M. LAKHSASSI

Exple 6 :

$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ mais l'ensemble des solutions de $x^2 = 4$ n'est pas $S = \{2\}$

En effet : $(E)\ x^2 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{4}$ $\left(\sqrt{x^2} = \sqrt{4} \Rightarrow (\sqrt{x^2})^2 = (\sqrt{4})^2 \Rightarrow x^2 = 4 \right)$

$\Leftrightarrow |x| = 2$

$\Leftrightarrow \underbrace{x = 2 \text{ ou } -2}_{\text{la bonne solution}}$

Equivalences

d'où $S_E = \{-2, 2\}$

2. Propriétés de $\mathbb{R}$:

2.1 – Addition et multiplication :

- $a+b=0 \iff a=-b$ (revient à ajouter $-b$ des deux côtés)
- $ab=1 \iff a=\frac{1}{b}$ ($b\neq 0$ forcément car $ab=1$)
- $1\times a=a$, même si $a=0$
- $a\times b=0 \iff a=0$ ou $b=0$ ('ou' inclusif)

$a+b$: addition / somme (de a et b)

$a-b$: soustraction / différence (entre a et b)

$a\times b$: multiplication / produit (de a et b)

$\frac{a}{b}$: division / rapport / quotient (de a sur b)

⚠ $\frac{a-b}{c-d} \neq \frac{a}{c}-\frac{b}{d}$

2.2 – Ordre sur $\mathbb{R}$:

Propriétés :

- $\forall x\in\mathbb{R}$, on a $x\leq x$ ('$\leq$' est réflexive)
- $\forall x,y\in\mathbb{R}$, si $x\leq y$ et $y\leq x$, alors $x=y$ ('$\leq$' est anti-symétrique)
- $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$, si $x\leq y$ et $y\leq z$, alors $x\leq z$ ('$\leq$' est transitive)

(Ces trois propriétés impliquent que '$\leq$' est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$)

- $\forall x,y\in\mathbb{R}$, on a $x\leq y$ ou $y\leq x$ ('$\leq$' est totale)

Remarques :

$a>b \Rightarrow a\geq b$

$a\geq b \not\Rightarrow a>b$

Pr. M. LAKHSSASSI

4

2.3 _ Opérations sur les inégalités :

عمليات متراجحات

Propositions : فرضيات

① Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

1.1 si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a+c \leq b+d$	1.2 si $a \leq b$ et $c \geq 0$ alors $a \times c \leq b \times c$	1.3 si $a \leq b$ et $c > 0$ alors $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$ (revient à $\times \frac{1}{c} \geq 0$)
1.4 si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $a.c \geq b.c$ Exo	1.5 si $a \leq b$ et $c < 0$ alors $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$ (revient à $\times \frac{1}{c} \leq 0$)	1.6 si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a-d \leq b-c$ Exo

② soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$

si $a \leq b$

et $c \leq d$

alors $a \times c \leq b \times d$

Exo

et $\frac{a}{d} \leq \frac{b}{c}$ (si d et $c \neq 0$)

Exo

③ Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}^-$

si $a \leq b$

et $c \leq d$

alors $a \times c \geq b \times d$

Exo

et $\frac{a}{d} \geq \frac{b}{c}$ (si d et $c \neq 0$)

Exo

④ Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$

- si a et b sont de même signe,

alors $a \leq b \Rightarrow \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$

Exo

- si a et b sont de signes opposés,

alors $a \leq b \Rightarrow$? Exo →

exemple : $a < 0$ et $b > 0$

$a \leq b \Rightarrow \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a}$

Pr. M. LAKHSSASSI

Démonstrations : براهين

On peut utiliser le lemme suivant :

Lemme :

La somme de deux nombres positifs est positif.
Le produit de deux nombres positifs est positif.
La somme de deux nombres négatifs est négatif.
Le produit de deux nombres négatifs est positif.

d'où :

1.1 $a \leq b$ et $c \leq d \Rightarrow b-a \geq 0$ et $d-c \geq 0$
$\Rightarrow$ leur somme est ≥ 0
$\Rightarrow (b-a)+(d-c) \geq 0$
$\Rightarrow a+c \leq b+d$

1.2 $b-a \geq 0$ et $c \geq 0 \Rightarrow$ leur produit est positif
$\Rightarrow (b-a).c \geq 0$
$\Rightarrow ac \leq dc$

1.3 $\times \frac{1}{c} > 0$ ok.

1.4 $a \leq b \Rightarrow a-b \leq 0$ et $c \leq 0 \Rightarrow$ leur produit est positif
$\Rightarrow (a-b)c \geq 0$
$\Rightarrow ac \geq bc$

1.5 $\times \frac{1}{c} < 0$ ok.

1.6 $c \leq d \xRightarrow{1.4} -c \geq -d$
et $b \geq a$
d'où $b-c \geq a-d$ (en utilisant 1.1)

R. M. LAKHSASSI

(2) $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$

$$\left.\begin{array}{l} * \; 0 \leq a \leq b \overset{c \geq 0}{\Longrightarrow} ac \leq bc \\ \text{et } 0 \leq c \leq d \overset{b \geq 0}{\Longrightarrow} bc \leq bd \end{array}\right\} \Longrightarrow ac \leq bd$$

$$* \; 0 < c \leq d \overset{\times \frac{1}{c} > 0}{\Longrightarrow} 1 \leq \frac{d}{c} \overset{\times \frac{1}{d} > 0}{\Longrightarrow} 0 < \frac{1}{d} \leq \frac{1}{c}$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 < \frac{1}{d} \leq \frac{1}{c} \\ \text{et } 0 \leq a \leq b \end{array}\right\} \overset{(\times)}{\Longrightarrow} a \times \frac{1}{d} \leq b \times \frac{1}{c} \Longrightarrow \frac{a}{d} \leq \frac{b}{c}$$

(3) $a, b, c, d \in \mathbb{R}^-$

$$\left.\begin{array}{l} * \; a \leq b \leq 0 \overset{c \leq 0}{\Longrightarrow} ac \geq bc \\ c \leq d \leq 0 \overset{b \leq 0}{\Longrightarrow} bc \geq bd \end{array}\right\} \Longrightarrow ac \geq bd$$

ou

$$\left.\begin{array}{l} a \leq b \leq 0 \\ c \leq d \leq 0 \end{array}\right\} \overset{\times -1}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} -a \geq -b \geq 0 \\ -c \geq -d \geq 0 \end{array}\right\} \overset{(\times)}{\Longrightarrow} ac \geq bd$$

$$* \; c \leq d \leq 0 \overset{\times \frac{1}{c} < 0}{\Longrightarrow} 1 \geq \frac{d}{c} \overset{\times \frac{1}{d} < 0}{\Longrightarrow} \frac{1}{d} \leq \frac{1}{c} < 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{d} \leq \frac{1}{c} < 0 \\ \text{et } a \leq b < 0 \end{array}\right\} \overset{(\times)}{\Longrightarrow} \frac{a}{d} \geq \frac{b}{c}$$

R. M. LAKHSASSI

(4) $a, b \in \mathbb{R}^*$

$*$ si $a, b > 0$, $\quad a \leq b \overset{\times \frac{1}{a} > 0}{\Longrightarrow} 1 \leq \frac{b}{a} \overset{\times \frac{1}{b} > 0}{\Longrightarrow} \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$

si $a, b < 0$, $\quad a \leq b \overset{\times \frac{1}{a} < 0}{\Longrightarrow} 1 \geq \frac{b}{a} \overset{\times \frac{1}{b} < 0}{\Longrightarrow} \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$

$*$ si $a < 0$ et $b > 0$, $\quad a \leq b \overset{\times \frac{1}{a} < 0}{\Longrightarrow} 1 \geq \frac{b}{a} \overset{\times \frac{1}{b} > 0}{\Longrightarrow} \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a}$

Propositions :

(5) $*$ si $a, b \geq 0$, alors : $\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \Longleftrightarrow a \leq b \Longleftrightarrow a^2 \leq b^2$

$*$ si $a, b \leq 0$, alors : $\sqrt{-a} \geq \sqrt{-b} \Longleftrightarrow a \leq b \Longleftrightarrow a^2 \geq b^2$

$*$ Pas de résultat si $a < 0$ et $b > 0$.

Démonstrations :

$\otimes$ $a, b \geq 0$,

$$\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ a \leq b \end{array}\right\} \overset{(\times)}{\Longrightarrow} a^2 \leq b^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \\ \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \overset{(\times)}{\Longrightarrow} \sqrt{a}.\sqrt{a} \leq \sqrt{b}.\sqrt{b} \\ \Longrightarrow a \leq b \end{array}$$

d'où $\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \Rightarrow a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2$

réciproque :

- si $a^2 \leq b^2$, alors $a^2 - b^2 \leq 0$, d'où $(a-b)\underbrace{(a+b)}_{\geq 0} \leq 0$

le produit de deux nombres étant négatif, et l'un étant positif, implique que l'autre est négatif,

d'où $a - b \leq 0$

d'où $a \leq b$

donc $a^2 \leq b^2 \Rightarrow a \leq b$

- si $a \leq b$, posons $c^2 = a$ avec $c \geq 0$

et $d^2 = b$ avec $d \geq 0$

d'où : $a \leq b \Rightarrow c^2 \leq d^2 \Rightarrow c \leq d$ (d'après la précédente démonstration)

$$c^2 = a \Rightarrow c = \sqrt{a}$$
$$d^2 = b \Rightarrow d = \sqrt{b}$$

d'où $a \leq b \Rightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

donc $a^2 \quad b^2 \Rightarrow a \leq b \Rightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

Conclusion : $\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \Longleftrightarrow a \leq b \Longleftrightarrow a^2 \leq b^2$

[si $0 \leq a \leq b$, on peut passer au carré ou à la racine carrée.]

R. M. LAKHSASSI

⊛ $a, b \le 0$, $\quad a \le b \le 0 \iff -a \ge -b \ge 0$

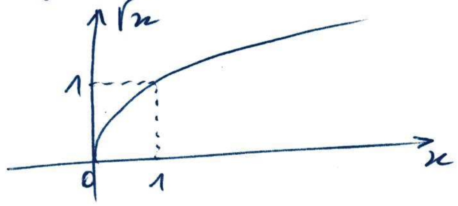
On remplace a et b dans la relation précédente (avec $a, b \ge 0$) par respectivement $-b$ et $-a$, ce qui donne :

$$\sqrt{-b} \le \sqrt{-a} \iff -b \le -a \iff (-b)^2 \le (-a)^2$$

d'où : $\sqrt{-a} \ge \sqrt{-b} \iff a \le b \iff a^2 \ge b^2$

Autre démonstration :

La fonction racine carrée : $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$

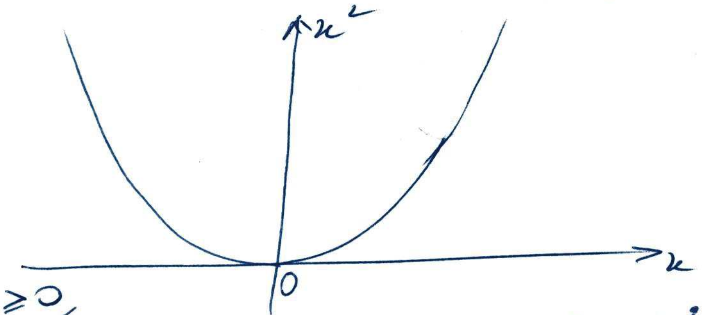


d'où si a et $b \ge 0$

alors : $a \le b \iff f(a) \le f(b) \iff \sqrt{a} \le \sqrt{b}$

et si a et $b \le 0$ $\quad a \le b \iff -a \ge -b \iff f(-a) \ge f(-b) \iff \sqrt{-a} \ge \sqrt{-b}$

la fonction puissance deux : $g : x \longmapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$



d'où si a et $b \ge 0$,

alors $a \le b \iff g(a) \le g(b) \iff a^2 \le b^2$

et si a et $b \le 0$,

alors $a \le b \iff g(a) \ge g(b) \iff a^2 \ge b^2$

On a montré donc que :

si $a, b \ge 0$, $\quad \sqrt{a} \le \sqrt{b} \iff a \le b \iff a^2 \le b^2$

et si $a, b \le 0$, $\quad \sqrt{-a} \ge \sqrt{-b} \iff a \le b \iff a^2 \ge b^2$

- On ne peut soustraire deux inégalités l'une à l'autre.
- on peut toujours additionner deux inégalités.
- on ne peut toujours multiplier deux inégalités, si tout est positif, on peut le faire.

2.4 - Valeur absolue : القيمة المطلقة

Définition: تعريف

On définit la valeur absolue d'un nombre réel x par: نعرف

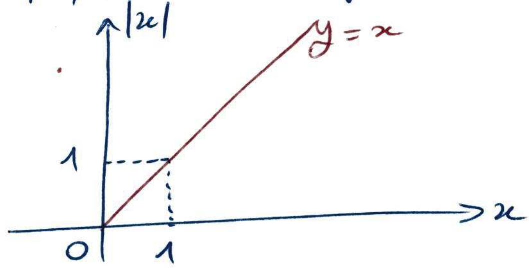
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

remarque : si $x = 0$, $|x| = x = -x$

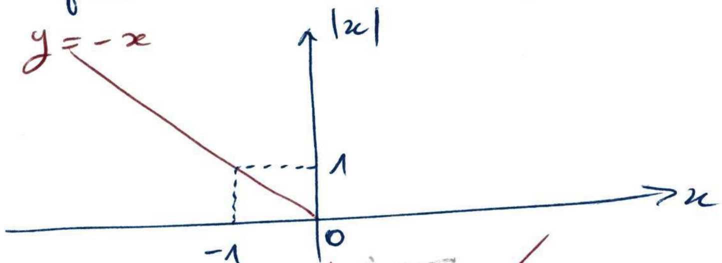
Soit f la fonction définie par $f(x) = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Courbe de f : $\mathcal{C}_f$
منحنى

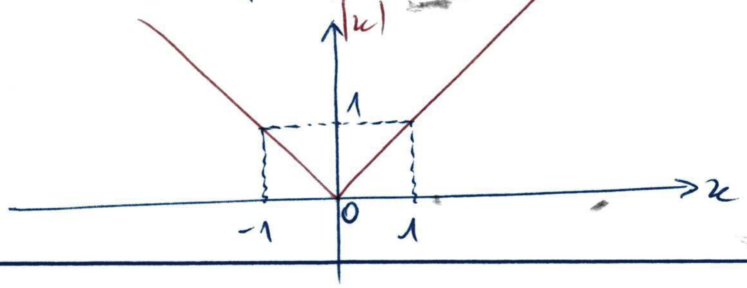
* $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = |x| = x$ $\qquad f(x) = x$: première bissectrice



* $\forall x \in \mathbb{R}^-$, $f(x) = |x| = -x$ $\qquad f(x) = -x$: symétrique % à (Ox) de $y = x$



d'où :



Pr. M. LAKHSASSI

Remarque : la fonction 'valeur absolue' est continue sur $\mathbb{R}$.
متصلة

elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$
قابلة للاشتقاق

elle n'est pas dérivable en 0.

Propriétés importantes-1 :

$\forall x, y \in \mathbb{R}$,

① $|x| \geq 0$; $|-x| = |x|$; $|x| > 0 \iff x \neq 0$

② $x \leq |x|$ et $-x \leq |x|$ → Exos

③ $|x|^2 = x^2 = |x^2|$

④ $\sqrt{x^2} = |x|$

⑤ $|xy| = |x| \cdot |y|$

Démonstrations :

1) ⊛ $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$ d'où si $x \geq 0$, $|x| = x \geq 0$
si $x < 0$, $|x| = -x > 0$

d'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$

⊛ $|-x| = \begin{cases} -x \text{ si } -x \geq 0 \\ -(-x) \text{ si } -x < 0 \end{cases} = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ -x = x & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$= |x|$ par définition

d'où $|-x| = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$

⊛ Supposons $|x| > 0$, $|x| = x$ ou $-x$ donc $x \neq 0$ ou $-x \neq 0$
dans les deux cas cela donne $x \neq 0$

d'où $|x| > 0 \Rightarrow x \neq 0$

Réciproque : si $x \neq 0$, alors $-x \neq 0$ d'où $|x| = x$ ou $-x$ est $\neq 0$
or $|x| \geq 0$ donc $|x| > 0$

Conclusion : $|x| > 0 \iff x \neq 0$.

Pr. M. LAKHSSASSI

2) si $x \geq 0$, $|x| = x$, d'où $\underline{x \leq |x|}$

$-x \leq 0$ et $0 \leq |x|$ d'où $\underline{-x \leq |x|}$

si $x \leq 0$, $|x| = -x$, d'où $\underline{-x \leq |x|}$

$x \leq 0$ et $0 \leq |x|$, d'où $\underline{x \leq |x|}$

Conclusion $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \leq |x|$ et $-x \leq |x|$

3)

$|x|^2 = |x| \cdot |x| = x \cdot x$ ou $= (-x) \cdot (-x)$ $= x^2$

et $x^2 \geq 0$ d'où $x^2 = |x^2|$

Conclusion : $|x|^2 = x^2 = |x^2|$

4) On sait que si $a \geq 0$, alors $\sqrt{a^2} = a$

d'où $\sqrt{x^2} = \sqrt{|x|^2}$ or $|x| \geq 0$, donc $\sqrt{|x|^2} = |x|$

d'où $\sqrt{x^2} = |x|$

5)

$$|xy| \overset{\text{déf.}}{=} \begin{cases} xy & \text{si } xy \geq 0 \\ \text{ou} & \\ -xy & \text{si } xy < 0 \end{cases}$$

on prend différents cas pour x et y $\begin{cases} x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ x \leq 0 \text{ et } y \leq 0 \\ x \geq 0 \text{ et } y \leq 0 \\ x \leq 0 \text{ et } y \geq 0 \end{cases}$

et on vérifie que $|xy| = |x| \cdot |y|$ ...

Propriétés importantes - 2 :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{R}^+$,

⑥ $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$ (et $|x| < a \iff -a < x < a$)

⑦ $|x| \geq a \iff x \leq -a$ <u>ou</u> $x \geq a$ (et $|x| > a \iff x < -a$ ou $x > a$)

Pr. M. LAKHSASSI

Démonstrations:

6) * si $|x| \leq a$: $(x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}^+)$

- si $x \geq 0$, alors $|x| = x$, d'où $x \leq a$
  or $-a \leq 0$ et $0 \leq x$, donc $x \geq -a$
  d'où $-a \leq x \leq a$
- si $x < 0$, alors $|x| = -x$, d'où $-x \leq a$ d'où $x \geq -a$
  or $a \geq 0$ et $0 \geq x$, donc $a \geq x$
  d'où $-a \leq x \leq a$

d'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a}$ (1)

* Réciproque:

si $-a \leq x \leq a$:

- si $x \geq 0$, $|x| = x$ or $x \leq a$, donc $|x| \leq a$
- si $x < 0$, $|x| = -x$ or $a \geq -x$, donc $|x| \leq a$
  (car $-a \leq x$)

d'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ -a \leq x \leq a \Rightarrow |x| \leq a}$ (2)

Conclusion: de (1) et (2), on déduit que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R}^+,\ |x| \leq a \iff -a \leq x \leq a}$$

Même démonstration avec les inégalités strictes.

7) * si $|x| \geq a$: $|x| = x$ ou $-x$
d'où $x \geq a$ ou $-x \geq a$
d'où $x \geq a$ ou $x \leq -a$

d'où $\boxed{|x| \geq a \Rightarrow x \leq -a \text{ ou } x \geq a}$ (1)

* Réciproque: si $x \geq a$ ou $x \leq -a$

alors si $x \geq a$, $a \geq 0$ d'où $x \geq 0$ d'où $x = |x|$
or $x \geq a$ d'où $|x| \geq a$

si $x \leq -a$, $-a \leq 0$ d'où $x \leq 0$ d'où $x = -|x|$
or $x \leq -a$ d'où $-|x| \leq -a$ d'où $|x| \geq a$

Pr. M. LAKHSASSI

d'où $\boxed{x \leq -a \text{ ou } x \geq a \Rightarrow |x| \geq a}$ ②

Conclusion : $\boxed{|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ ou } x \geq a}$ (de ① et ②)

Même démonstration avec les inégalités strictes.

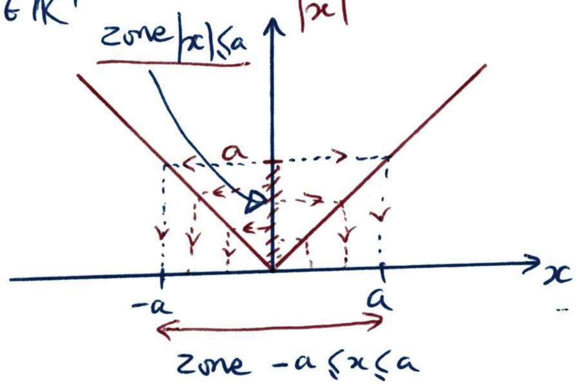
Remarque :

si $a \in \mathbb{R}_-^*$; $a < 0$, $|x| \leq a$ est impossible

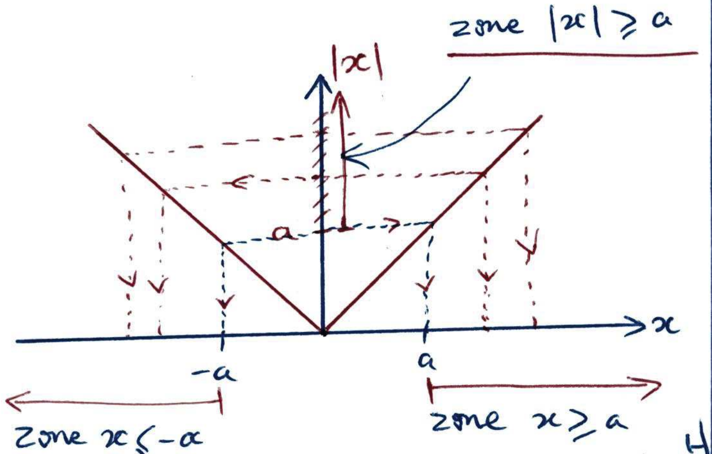
et $|x| \geq a$ est toujours vraie.

Graphiquement :

$a \in \mathbb{R}^+$



$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$



$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ ou $x \geq a$

Pr. M. LAKHSSASSI

Propriétés importantes - 3 :

⑧ Inégalité Triangulaire (I.T) :

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x+y| \leq |x| + |y|}$$

⑨ $2^{\text{ème}}$ Inégalité Triangulaire (2^{e} I.T) :

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|}$$

Démonstrations :

8) Méthode 1 : soient $x, y \in \mathbb{R}$, $|x+y| \leq |x| + |y| \Leftrightarrow -(|x|+|y|) \leq x+y \leq (|x|+|y|)$

on sait que : $-|x| \leq x \leq |x|$ (voir ②)

et $-|y| \leq y \leq |y|$

donc : $-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$

$\Longleftrightarrow$ $|x+y| \leq |x|+|y|$

Méthode 2 :

on a $|x+y| \geq 0$ et $|x|+|y| \geq 0$

donc $|x+y| \leq |x|+|y| \Longleftrightarrow |x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2$

or $|x|^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$, donc :

$\Longleftrightarrow$ $(x+y)^2 \leq |x|^2 + 2\underbrace{|x|\cdot|y|} + |y|^2$

$\Longleftrightarrow$ $x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|xy| + y^2$

$\Longleftrightarrow$ $xy \leq |xy|$ toujours vrai

d'où $|x+y| \leq |x|+|y|$ est vraie.

Pr. M. LAKHSASSI

9) Méthode 1 : Soient $x, y \in \mathbb{R}$,

Puisque $x = x - y + y$, alors d'après l'I.T,

$|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y| + |y|$

d'où : $|x|-|y| \leq |x-y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ①

en inversant les rôles de x et y, on a :

$|y|-|x| \leq |y-x|$

d'où : $-(|x|-|y|) \leq |x-y|$

d'où : $-|x-y| \leq |x|-|y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ②

① et ② donnent $-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y|$

d'où $\boxed{||x|-|y|| \leq |x-y| \quad , \forall x,y \in \mathbb{R}}$

Méthode 2 :

$$0 \leq \big||x|-|y|\big| \leq |x-y| \iff \big||x|-|y|\big|^2 \leq |x-y|^2$$

$$\iff (|x|-|y|)^2 \leq (x-y)^2$$

$$\iff \underset{\overset{\shortparallel}{x^2}}{|x|^2} - 2|x|\cdot|y| + \underset{\overset{\shortparallel}{y^2}}{|y|^2} \leq x^2 - 2xy + y^2$$

$$\iff -2|x|\cdot|y| \leq -2xy$$

$$\overset{\times\frac{1}{2}}{\iff} -|x|\cdot|y| \leq -xy$$

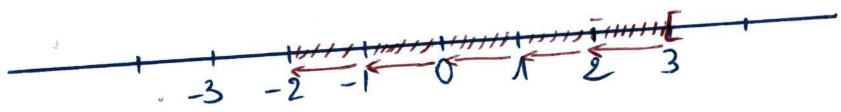
$$\iff \underbrace{|x|\cdot|y|} \geq xy$$

$$\iff |x \cdot y| \geq xy \text{ : toujours vrai}$$

donc $||x|-|y|| \leq |x-y|$ est vraie.

3. Partie entière : الجزء الصحيح

Exemples :



$E(0{,}25) = 0$, $E(0) = 0$, $E(-0{,}25) = -1$

$E(\pi) = 3$, $\boxed{\forall p \in \mathbb{Z}, \ E(p) = p}$

3.1 Proposition - Définition : فرضية - تعريف

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$\exists! p \in \mathbb{Z} \ / \ p \leq x < p+1$

ce p est la partie entière de x, il est noté $E(x)$.

Pr. M. LAKHSASSI

Il existe un unique entier relatif ($\in \mathbb{Z}$) p, tel que

$$p \leq x < p+1$$

On a donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad E(x) \leq x < E(x)+1}$$

Exemple: $E(x) = 3 \iff 3 \leq x < 3+1$

$\iff 3 \leq x < 4$

Remarques:

- Si pour $x \in \mathbb{R}$, on trouve un $p \in \mathbb{Z}$ / $p \leq x < p+1$ alors $p = E(x)$.
- on note aussi $E(x) = [x] = \lfloor x \rfloor$ dans certaines références.

3.2 Courbe ou graphique de la partie entière: منحنى

Définition:

On définit la "fonction partie entière" par:

$$E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$x \longmapsto E(x)$$

Pr. M. LAKHSSASSI

Graphique:

Pour tracer le graphique de cette fonction, on se place dans les intervalles où "E" est constante:

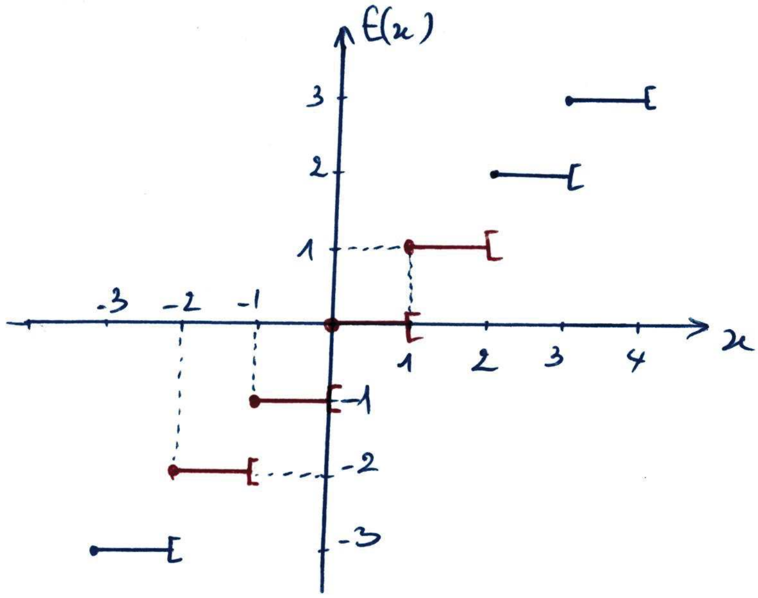
$\forall x \in [0,1[, \quad E(x) = 0$: fonction constante sur $[0,1[$, égale à 0

$\forall x \in [1,2[, \quad E(x) = 1$

$\forall x \in [-1,0[, \quad E(x) = -1$

$\forall x \in [-2,-1[, \quad E(x) = -2$.

d'où :



De manière générale : $\boxed{\forall p \in \mathbb{Z},\quad \forall x \in [p, p+1[,\quad E(x) = p}$

Exercice :

TD

1- Montrer que (Mq) $3 \leq \sqrt{10} < 4$.
En déduire la valeur de $E(\sqrt{10})$.

2- Tracer le graphique de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow ?$
$x \longmapsto -E(x)+1$
(donner l'ensemble d'arrivée)
مجموعة الوصول

Pr. M. LAKHSASSI

4. Maximum, Minimum, Borne supérieure, Borne inférieure :

4.1 - Minimum, Maximum, dans $\mathbb{R}$:

القيمة القصوى
القيمة الدنيا

Max(a,b) :

On définit le maximum entre deux nombres réels a et b par :

$$\boxed{\max(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } a \geq b \\ b & \text{si } a < b \end{cases}}$$ (ou $a \leq b$)

Min(a,b) :

On définit le minimum entre deux nombres réels a et b par :

$$\boxed{\min(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } a \leq b \\ b & \text{si } a > b \end{cases}}$$ (ou $a \geq b$)

Exemples : $\max(2,3) = 3$, $\max(-1,2) = 2$, $\max(a,a) = a$

$\min(0,0) = 0$

si $a = b$, $\max(a,b) = \min(a,b) = a = b$.

4.2 _ Maximum, Minimum d'une partie de $\mathbb{R}$:

Définitions :

Soit A une partie non vide de : $A \subset \mathbb{R}$ et $A \neq \emptyset$

- Un réel α est un plus grand élément de A ssi :

$$\boxed{\alpha \in A \text{ et } \forall x \in A,\ x \leq \alpha}$$

s'il existe, le plus grand élément est unique, il est aussi appelé le maximum de A et est noté $\boxed{\max(A)}$

- Le plus petit élément de A, s'il existe est unique, il est aussi appelé le minimum de A et est noté $\boxed{\min(A)}$, c'est le réel α /

$$\boxed{\alpha \in A \text{ et } \forall x \in A,\ x \geq \alpha}$$

d'où : $\alpha = \min(A) \iff \alpha \in A$ et $\forall x \in A,\ x \geq \alpha$

et : $\beta = \max(A) \iff \beta \in A$ et $\forall x \in A,\ x \leq \beta$

Résumé.

⚠ $\max(A)$ et $\min(A)$ n'existent pas toujours.

Exemples : $a, b \in \mathbb{R}$

- $A = [a,b]$

$\max[a,b] = b$ $\quad (b \in [a,b]$ et $\forall x \in [a,b],\ x \leq b)$

$\min[a,b] = a$ $\quad (a \in [a,b]$ et $\forall x \in [a,b],\ x \geq a)$

Pr. M. LAKHSSASSI

• $A =]a, b[$: l'intervalle $]a, b[$ n'a ni maximum, ni minimum

si on prend $b - 10^{-8} = b - 0{,}00000001$

alors, on peut toujours imaginer en mathématiques, un nombre entre $b - 10^{-8}$ et b, par exemple $b - 10^{-10}$ ou $b - 10^{-100}$.

Dans la réalité physique, $b - 10^{-100}$ peut ne correspondre à rien.

Plus : En effet, en physique et c'est la réalité, quand je pars du point a, j'arrive au point b, ce qui signifie qu'il n'y a pas une infinité de points entre a et b !! sinon je n'arriverai jamais à b.

D'où 10^{-10} est un nombre imaginaire, qui peut avoir une réalité physique, comme par exemple la distance entre deux atomes peut être égale à environ 10^{-10} mètres, alors que 10^{-1000} m peut ne correspondre à aucune distance physique.

Par contre : $\underbrace{10^{-1000}\,m}_{\text{imaginaire mathématique}} \times \underbrace{(10^{990})}_{\text{nombre mathématique}} = \underbrace{10^{-10}\,m}_{\text{réalité physique}}$

Pr. M. LAKHSSASSI

Tout ceci pour dire que :

en physique, l'intervalle $]a, b[$ a forcément un maximum et un minimum. Alors qu'en mathématiques, on peut imaginer un nombre entre ce maximum (si c'est par exemple $b-10^{-10}$) et b, qui peut servir pour effectuer des calculs.

- $\boxed{A = [0, 1[:}$ $\min A = 0$

  A n'a pas de maximum (mathématique).

4.3 — Majorants, Minorants :

كابر صاغر

Définition : Soit A partie non vide de $\mathbb{R}$ ($A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$)

- Un réel M est un majorant de A ssi :

  $\forall x \in A, \quad x \leq M$

  A est alors majorée par M.

  مكبورة

- Un réel m est un minorant de A ssi :

  $\forall x \in A, \quad x \geq m$

  A est alors minorée par m.

  مصغورة

Exemples :

- $A =]0, 2[$: 2 est un majorant de $]0, 2[$

  3 " " " "

  Tous les $x \geq 2$ sont des majorants de $]0, 2[$

-1 est un minorant de $]0,2[$

0 " " " " "

Tous les $x \leq 0$ sont <u>des</u> minorants de $]0,2[$.

- $A = \mathbb{R}$: A n'a ni majorant, ni minorant

  (on ne peut pas dire qu'on a trouvé le plus grand nombre réel α, on pourra toujours <u>imaginer</u> en mathématiques, un nombre plus grand, par exemple $\alpha + 1$) $\left(\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \,/\, y > x \\ \text{et } \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \,/\, y < x \end{array} \right)$

- $A = \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$: n'a pas de majorant.

  Tous les $x \leq 0$ sont des minorants de $\mathbb{R}_+^*$.

- $A = [0, 1[$

<u>Remarques:</u>

- Si majorant de A appartient à A, c'est aussi le maximum de A. Pareil pour le minimum.
- Le majorant de A, s'il existe, <u>n'est pas unique</u> ! Pareil pour le minorant, contrairement au maximum et au minimum.

⚠ - Le majorant et le minorant de A peuvent ne pas exister.

- " " " " " " n'appartiennent pas forcément à A (il se peut qu'ils y appartiennent).

4.4 - Borne supérieure, Borne inférieure : الحد الأقصى الحد الأدنى

Exemple : $A = [0, 1[$

0 = le minimum = un minorant = La borne inférieure

1 = un majorant = la borne supérieure

Définition :

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- La borne supérieure de A est le plus petit des majorants de A. elle existe, elle est unique et est notée $\boxed{\sup(A)}$.
- La borne inférieure de A est le plus grand des minorants de A. Si elle existe, elle est unique et est notée $\boxed{\inf(A)}$.

Définition : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

On dit que A est bornée si elle admet une borne inférieure et une borne supérieure.

Exemples :

- $A =]0, 1]$:

$\max(A) = 1$

$\min(A)$ n'existe pas

$\left.\begin{array}{l}\sup(A) = 1 \\ \inf(A) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$ A est bornée d'après la déf.

Pr. M. LAKHSSASSI

- $A =]0, +\infty[$:
  max(A) : n'existe pas
  min(A) : n'existe pas
  sup(A) : n'existe pas
  inf(A) = 0
  $\Rightarrow$ A n'est pas bornée

- $A = [a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R})$:

  max(A) = sup(A) = b
  min(A) = inf(A) = a
  $\Rightarrow$ A est bornée

Remarques :

- sup(A) et inf(A) n'appartiennent pas forcément à A (elles peuvent parfois y appartenir).
- ⚠ sup(A) et inf(A) peuvent ne pas exister.

Théorème :

- Toute partie non vide de $\mathbb{R}$ et majorée admet une borne supérieure.
- Toute partie non vide de $\mathbb{R}$ et minorée admet une borne inférieure.

Dém. :

- si $A \subset \mathbb{R}$ et $A \neq \emptyset$ est majorée, alors il existe un majorant et même alors des majorants de A.
  soit sup(A) := le plus petit de ces majorants (par définition de sup(A))
  donc sup(A) existe
  càd que A admet une borne supérieure.

- Pareil pour $\inf(A)$.

<u>Remarque :</u> on a aussi la réciproque :

- Si A admet une borne supérieure, alors elle est majorée. En effet, par définition de la borne supérieure, c'est le plus grand des majorants, donc il existe des majorants.
- De même, si A admet une borne inférieure, alors elle est minorée.

d'où la propriété suivante :

<u>Propriété :</u> Soit A une partie non vide de A.

$$\underline{A \text{ bornée}} \Longleftrightarrow \begin{cases} A \text{ minorée} \\ \text{et} \\ A \text{ majorée} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists \sup(A) \\ \exists \inf(A) \end{cases}$$

Pr. M. LAKHSSASSI