Nombres complexes

1 Forme cartésienne, forme polaire

Exercice 1

Mettre sous la forme $a+ib$ $(a,b \in \mathbb{R})$ les nombres :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000001]

Exercice 2

Écrire sous la forme $a+ib$ les nombres complexes suivants :

1. Nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$.
2. Nombre de module 3 et d'argument $-\pi/8$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000003]

Exercice 3

Calculer le module et l'argument de $u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1-i$. En déduire le module et l'argument de $w = \frac{u}{v}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000011]

Exercice 4

Déterminer le module et l'argument des nombres complexes :

$$e^{e^{i\alpha}} \quad \text{et} \quad e^{i\theta} + e^{2i\theta}.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000013]

2 Racines carrées, équation du second degré

Exercice 5

Calculer les racines carrées de 1, i, $3+4i$, $8-6i$, et $7+24i$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000027]

Exercice 6

1. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
2. Calculer les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000029]

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2+z+1=0 \quad ; \quad z^2-(1+2i)z+i-1=0 \quad ; \quad z^2-\sqrt{3}z-i=0 \quad ;$$

$$z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0\ ;\ z^2-(3+4i)z-1+5i=0\ ;\ 4z^2-2z+1=0\ ;$$

$$z^4+10z^2+169=0 \quad ; \quad z^4+2z^2+4=0.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000031]

3 Racine n-ième

Exercice 8

Calculer la somme $S_n = 1+z+z^2+\cdots+z^n$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000047]

Exercice 9

1. Résoudre $z^3 = 1$ et montrer que les racines s'écrivent 1, j, j^2. Calculer $1+j+j^2$ et en déduire les racines de $1+z+z^2=0$.
2. Résoudre $z^n = 1$ et montrer que les racines s'écrivent $1,\varepsilon,\dots,\varepsilon^{n-1}$. En déduire les racines de $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=0$. Calculer, pour $p\in\mathbb{N}$, $1+\varepsilon^p+\varepsilon^{2p}+\cdots+\varepsilon^{(n-1)p}$.

Correction ▼ Vidéo ■ [000048]

Exercice 10

Trouver les racines cubiques de $2-2i$ et de $11+2i$.

Correction ▼ Vidéo ■ [000043]

Exercice 11

1. Soient z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes distincts ayant le même cube.
   Exprimer z_2 et z_3 en fonction de z_1.
2. Donner, sous forme polaire, les solutions dans $\mathbb{C}$ de :

   $$z^6+(7-i)z^3-8-8i=0.$$

   (Indication : poser $Z=z^3$; calculer $(9+i)^2$)

Correction ▼ Vidéo ■ [000056]

4 Géométrie

Exercice 12

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

1. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 1,$
2. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000060]

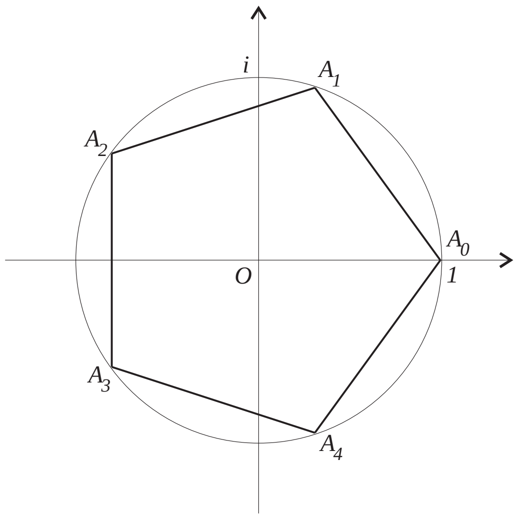
Exercice 13

Montrer que pour $u, v \in \mathbb{C}$, on a $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$. Donner une interprétation géométrique.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000069]

Exercice 14

Soit $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ un pentagone régulier. On note O son centre et on choisit un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA_0}$, qui nous permet d'identifier le plan avec l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.



1. Donner les affixes $\omega_0, \dots, \omega_4$ des points $A_0, \dots, A_4$. Montrer que $\omega_k = {\omega_1}^k$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Montrer que $1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \omega_1^3 + \omega_1^4 = 0$.
2. En déduire que $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est l'une des solutions de l'équation $4z^2 + 2z - 1 = 0$. En déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.
3. On considère le point B d'affixe -1. Calculer la longueur BA_2 en fonction de $\sin\frac{\pi}{10}$ puis de $\sqrt{5}$ (on remarquera que $\sin\frac{\pi}{10} = \cos\frac{2\pi}{5}$).
4. On considère le point I d'affixe $\frac{i}{2}$, le cercle $\mathscr{C}$ de centre I de rayon $\frac{1}{2}$ et enfin le point J d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la demi-droite $[BI)$. Calculer la longueur BI puis la longueur BJ.
5. **Application :** Dessiner un pentagone régulier à la règle et au compas. Expliquer.

Correction ▼ Vidéo ■ [000077]

5 Trigonométrie

Exercice 15

Soit z un nombre complexe de module ρ, d'argument θ, et soit $\bar{z}$ son conjugué. Calculer $(z+\bar{z})(z^2+\bar{z}^2)\dots(z^n+\bar{z}^n)$ en fonction de ρ et θ.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000020]

Exercice 16

En utilisant les nombres complexes, calculer $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000080]

6 Divers

Exercice 17

Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a+ib\ ;\ a,b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que si α et β sont dans $\mathbb{Z}[i]$ alors $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$ le sont aussi.
2. Trouver les élements inversibles de $\mathbb{Z}[i]$, c'est-à-dire les éléments $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ tels qu'il existe $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ avec $\alpha\beta = 1$.
3. Vérifier que quel que soit $\omega \in \mathbb{C}$ il existe $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|\omega - \alpha| < 1$.
4. Montrer qu'il existe sur $\mathbb{Z}[i]$ une division euclidienne, c'est-à-dire que, quels que soient α et β dans $\mathbb{Z}[i]$ il existe q et r dans $\mathbb{Z}[i]$ vérifiant :
$$\alpha = \beta q + r \qquad \text{avec} \qquad |r| < |\beta|.$$
(Indication : on pourra considérer le complexe $\frac{\alpha}{\beta}$)

Correction ▼ Vidéo ■ [000096]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Pour se "débarrasser" d'un dénominateur écrivez $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$.

Indication pour l'exercice 2 ▲

Il faut bien connaître ses formules trigonométriques. En particulier si l'on connait $\cos(2\theta)$ ou $\sin(2\theta)$ on sait calculer $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Passez à la forme trigonométrique. Souvenez-vous des formules sur les produits de puissances :

$$e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)} \text{ et } e^{ia}/e^{ib} = e^{i(a-b)}.$$

Indication pour l'exercice 4 ▲

Pour calculer un somme du type $e^{iu} + e^{iv}$ il est souvent utile de factoriser par $e^{i\frac{u+v}{2}}$.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Pour $z = a + ib$ on cherche $\omega = \alpha + i\beta$ tel que $(\alpha + i\beta)^2 = a + ib$. Développez et indentifiez. Utilisez aussi que $|\omega|^2 = |z|$.

Indication pour l'exercice 6 ▲

Il s'agit de calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$ de deux façons différentes.

Indication pour l'exercice 7 ▲

Pour les équation du type $az^4 + bz^2 + c = 0$, poser $Z = z^2$.

Indication pour l'exercice 8 ▲

Calculer $(1-z)S_n$.

Indication pour l'exercice 12 ▲

Le premier ensemble est une droite le second est un cercle.

Indication pour l'exercice 13 ▲

Pour l'interprétation géométrique cherchez le parallélogramme.

Indication pour l'exercice 15 ▲

Utiliser la formule d'Euler pour faire apparaître des cosinus.

Indication pour l'exercice 16 ▲

Appliquer deux fois la formule de Moivre en remarquant $e^{i5\theta} = (e^{i\theta})^5$.

Correction de l'exercice 1 ▲

Remarquons d'abord que pour $z \in \mathbb{C}$, $z\bar{z} = |z|^2$ est un nombre réel, ce qui fait qu'en multipliant le dénominateur par son conjugué nous obtenons un nombre réel.

$$\frac{3+6i}{3-4i} = \frac{(3+6i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{9-24+12i+18i}{9+16} = \frac{-15+30i}{25} = -\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i.$$

Calculons

$$\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{5} = \frac{1+3i}{5},$$

et

$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \left(\frac{1+3i}{5}\right)^2 = \frac{-8+6i}{25} = -\frac{8}{25}+\frac{6}{25}i.$$

Donc

$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} = -\frac{8}{25}+\frac{6}{25}i - \frac{3}{5}+\frac{6}{5}i = -\frac{23}{25}+\frac{36}{25}i.$$

Soit $z = \frac{2+5i}{1-i}$. Calculons $z+\bar{z}$, nous savons déjà que c'est un nombre réel, plus précisément : $z = -\frac{3}{2}+\frac{7}{2}i$ et donc $z+\bar{z} = -3$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1+i\sqrt{3}$.
2. $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{8}} = 3\cos\frac{\pi}{8} - 3i\sin\frac{\pi}{8} = \frac{3\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - \frac{3i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
   Il nous reste à expliquer comment nous avons calculé $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$: posons $\theta = \frac{\pi}{8}$, alors $2\theta = \frac{\pi}{4}$ et donc $\cos(2\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(2\theta)$. Mais $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$. Donc $\cos^2\theta = \frac{\cos(2\theta)+1}{2} = \frac{1}{4}(2+\sqrt{2})$. Et ensuite $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = \frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$. Comme $0 \leqslant \theta = \frac{\pi}{8} \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont des nombres positifs. Donc
   $$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Correction de l'exercice 3 ▲

Nous avons

$$u = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

puis

$$v = 1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Il ne reste plus qu'à calculer le quotient :

$$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{-i\frac{\pi}{6}+i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

D'après la formule de Moivre pour $e^{i\alpha}$ nous avons :

$$e^{e^{i\alpha}} = e^{\cos\alpha + i\sin\alpha} = e^{\cos\alpha}e^{i\sin\alpha}.$$

Or $e^{\cos\alpha} > 0$ donc l'écriture précédente est bien de la forme “module-argument”.

De façon générale pour calculer un somme du type $e^{iu}+e^{iv}$ il est souvent utile de factoriser par $e^{i\frac{u+v}{2}}$. En effet

$$\begin{aligned} e^{iu}+e^{iv} &= e^{i\frac{u+v}{2}}\left(e^{i\frac{u-v}{2}}+e^{-i\frac{u-v}{2}}\right) \\ &= e^{i\frac{u+v}{2}}2\cos\frac{u-v}{2} \\ &= 2\cos\frac{u-v}{2}e^{i\frac{u+v}{2}}. \end{aligned}$$

Ce qui est proche de l'écriture en coordonées polaires.
Pour le cas qui nous concerne :

$$z = e^{i\theta}+e^{2i\theta} = e^{\frac{3i\theta}{2}}\left[e^{-\frac{i\theta}{2}}+e^{\frac{i\theta}{2}}\right] = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{3i\theta}{2}}.$$

Attention le module dans une décomposion en forme polaire doit être positif ! Donc si $\cos\frac{\theta}{2}\geqslant 0$ alors $2\cos\frac{\theta}{2}$ est le module de z et $3\theta/2$ est son argument ; par contre si $\cos\frac{\theta}{2}<0$ le module est $2|\cos\frac{\theta}{2}|$ et l'argument $3\theta/2+\pi$ (le $+\pi$ compense le changement de signe car $e^{i\pi}=-1$).

Correction de l'exercice 5 ▲

Racines carrées. Soit $z=a+ib$ un nombre complexe avec $a,b\in\mathbb{R}$; nous cherchons les complexes $\omega\in\mathbb{C}$ tels que $\omega^2=z$. Écrivons $\omega=\alpha+i\beta$. Nous raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned} \omega^2 = z &\Leftrightarrow (\alpha+i\beta)^2 = a+ib \\ &\Leftrightarrow \alpha^2-\beta^2+2i\alpha\beta = a+ib \end{aligned}$$

Soit en identifiant les parties réelles entre elles ainsi que les parties imaginaires :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2-\beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

Sans changer l'équivalence nous rajoutons la condition $|\omega|^2=|z|$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2+\beta^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ \alpha^2-\beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

Par somme et différence des deux premières lignes :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ \beta^2 = \frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ \beta = \pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ \alpha\beta \text{ est du même signe que } b \end{cases}$$

Cela donne deux couples (α,β) de solutions et donc deux racines carrées (opposées) $\omega=\alpha+i\beta$ de z.

En pratique on répète facilement ce raisonnement, par exemple pour $z = 8-6i$,

$$\begin{aligned}
\omega^2 = z &\Leftrightarrow (\alpha + i\beta)^2 = 8-6i \\
&\Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = 8-6i \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 8 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10 \text{ le module de } z \\ \alpha^2 - \beta^2 = 8 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha^2 = 18 \\ \beta^2 = 1 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \\ \beta = \pm 1 \\ \alpha \text{ et } \beta \text{ de signes opposés} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \qquad \alpha = 3 \text{ et } \beta = -1 \\ \text{ou} \\ \qquad \alpha = -3 \text{ et } \beta = +1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Les racines de $z = 8-6i$ sont donc $\omega_1 = 3-i$ et $\omega_2 = -\omega_1 = -3+i$.
Pour les autres :

- Les racines carrées de 1 sont : $+1$ et -1.
- Les racines carrées de i sont : $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.
- Les racines carrées de $3+4i$ sont : $2+i$ et $-2-i$.
- Les racines carrées de $7+24i$ sont : $4+3i$ et $-4-3i$.

Correction de l'exercice 6 ▲

Par la méthode usuelle nous calculons les racines carrées $\omega, -\omega$ de $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, nous obtenons

$$\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}},$$

qui peut aussi s'écrire :

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Mais nous remarquons que z s'écrit également

$$z = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

et $e^{i\frac{\pi}{8}}$ vérifie

$$\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2 = e^{\frac{2i\pi}{8}} = e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Cela signifie que $e^{i\frac{\pi}{8}}$ est une racine carrée de z, donc $e^{i\frac{\pi}{8}} = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$ est égal à ω ou $-\omega$. Comme $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ alors $e^{i\frac{\pi}{8}} = \omega$ et donc par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Équations du second degré. La méthode génerale pour résoudre les équations du second degré $az^2+bz+c=0$ (avec $a,b,c\in\mathbb{C}$ et $a\neq 0$) est la suivante : soit $\Delta=b^2-4ac$ le discriminant complexe et δ une racine carrée de Δ ($\delta^2=\Delta$) alors les solutions sont :

$$z_1=\frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-b-\delta}{2a}.$$

Dans le cas où les coefficients sont réels, on retrouve la méthode bien connue. Le seul travail dans le cas complexe est de calculer une racine δ de Δ.
Exemple : pour $z^2-\sqrt{3}z-i=0$, $\Delta=3+4i$, dont une racine carrée est $\delta=2+i$, les solutions sont donc :

$$z_1=\frac{\sqrt{3}+2+i}{2} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{\sqrt{3}-2-i}{2}.$$

Les solutions des autres équations sont :
- L'équation $z^2+z+1=0$ a pour solutions : $\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$, $\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$.
- L'équation $z^2-(1+2i)z+i-1=0$ a pour solutions : $1+i$, i.
- L'équation $z^2-\sqrt{3}z-i=0$ a pour solutions : $\frac{1}{2}(2-\sqrt{3}+i)$, $\frac{1}{2}(-2-\sqrt{3}-i)$
- L'équation $z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0$ a pour solutions : $5-12i$, $-2i$.
- L'équation $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$ a pour solutions : $2+3i$, $1+i$.
- L'équation $4z^2-2z+1=0$ a pour solutions : $\frac{1}{4}(1+i\sqrt{3})$, $\frac{1}{4}(1-i\sqrt{3})$.
- L'équation $z^4+10z^2+169=0$ a pour solutions : $2+3i$, $-2-3i$, $2-3i$, $-2+3i$.
- L'équation $z^4+2z^2+4=0$ a pour solutions : $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i\sqrt{3})$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i\sqrt{3})$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i\sqrt{3})$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i\sqrt{3})$.

Correction de l'exercice 8 ▲

$$S_n=1+z+z^2+\cdots+z^n=\sum_{k=0}^{n}z^k.$$

Nous devons retrouver le résultat sur la somme $S_n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$d'une suite géométrique dans le cas où $z\neq 1$ est un réel. Soit maintenant $z\neq 1$ un nombre complexe. Calculons $S_n(1-z)$.

$$\begin{aligned}
S_n(1-z)&=(1+z+z^2+\cdots+z^n)(1-z) \text{ développons}\\
&=1+z+z^2+\cdots+z^n-z-z^2-\cdots-z^{n+1} \text{ les termes intermédiaires s'annulent}\\
&=1-z^{n+1}.
\end{aligned}$$

Donc

$$S_n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}, \text{ pour } z\neq 1.$$

Correction de l'exercice 9 ▲

Calcul de racine n-ième. Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $z^n=1$, déjà $|z|^n=1$ et donc $|z|=1$. Écrivons $z=e^{i\theta}$. L'équation devient

$$e^{in\theta}=e^0=1 \Leftrightarrow n\theta=0+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta=\frac{2k\pi}{n},\ k\in\mathbb{Z}.$$

Les solution sont donc

$$\mathscr{S}=\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Comme le polynôme z^n-1 est de degré n il a au plus n racines. Nous choisissons pour représentants :

$$\mathscr{S}=\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k=0,\ldots,n-1\right\}.$$

De plus si $\varepsilon=e^{\frac{2i\pi}{n}}$ alors $\mathscr{S}=\left\{\varepsilon^k,\ k=0,\ldots,n-1\right\}$. Ces racines sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité.

Soit $P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}$ pour $z \neq 1$. Donc quelque soit $z \in \mathscr{S} \setminus \{1\}$ $P(z) = 0$, nous avons ainsi trouver $n-1$ racines pour P de degré $n-1$, donc l'ensemble des racines de P est exactement $\mathscr{S} \setminus \{1\}$.
Pour conclure soit $Q_p(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{kp}$.
Si $p = 0 + \ell n$, $\ell \in \mathbb{Z}$ alors $\varepsilon^{kp} = \varepsilon^{k\ell n} = (\varepsilon^n)^{k\ell} = 1^{k\ell} = 1$. Donc $Q_p(z) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$.
Sinon $Q_p(z)$ est la somme d'une suite géométrique de raison ε^p :

$$Q_p(z) = \frac{1-(\varepsilon^p)^n}{1-\varepsilon^p} = \frac{1-(\varepsilon^n)^p}{1-\varepsilon^p} = \frac{1-1}{1-\varepsilon^p} = 0.$$

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Les trois racines cubiques ont même module $\sqrt{2}$, et leurs arguments sont $-\pi/12$, $7\pi/12$ et $5\pi/4$. Des valeurs approchées sont $1{,}36603 - 0{,}36603i$, $-0{,}36603 + 1{,}36603i$ et $-1-i$.
2. $-1-2i$, $(-1-2i)j$ et $(-1-2i)j^2$ où $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ (racine cubique de 1).

Correction de l'exercice 11 ▲

Soient z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes *distincts* ayant le même cube.

1. $z_1 \neq 0$ car sinon on aurait $z_1 = z_2 = z_3 = 0$. Ainsi $(\frac{z_2}{z_1})^3 = (\frac{z_3}{z_1})^3 = 1$. Comme les trois nombres $1, (\frac{z_2}{z_1})$ et $(\frac{z_3}{z_1})$ sont distincts on en déduit que ce sont les trois racines cubiques de 1. Ces racines sont $1, j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $j^2 = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$. A une permutation près des indices 2 et 3 on a donc :
$$z_2 = jz_1 \qquad \text{et} \qquad z_3 = j^2 z_1.$$
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :
$$z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0 \Leftrightarrow z^3 \text{ est solution de } Z^2 + (7-i)Z - 8 - 8i = 0$$
Etudions l'équation $Z^2 + (7-i)Z - 8 - 8i = 0$. $\Delta = (7-i)^2 + 4(8+8i) = 80 + 18i = (9+i)^2$. Les solutions sont donc -8 et $1+i$. Nous pouvons reprendre notre suite d'équivalences :
$$\begin{aligned} z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0 &\Leftrightarrow z^3 \in \{-8, 1+i\} \\ &\Leftrightarrow z^3 = (-2)^3 \quad \text{ou} \quad z^3 = (\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}})^3 \\ &\Leftrightarrow z \in \{-2, -2e^{\frac{2i\pi}{3}}, -2e^{-\frac{2i\pi}{3}}\} \text{ ou } z \in \{\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{9\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\} \\ &\Leftrightarrow z \in \{-2, 2e^{\frac{i\pi}{3}}, 2e^{-\frac{i\pi}{3}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\}. \end{aligned}$$
L'ensemble des solutions est donc :
$$\{-2, 2e^{\frac{i\pi}{3}}, 2e^{-\frac{i\pi}{3}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\}.$$

Correction de l'exercice 12 ▲

Nous identifions $\mathbb{C}$ au plan affine et $z = x + iy$ à $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Remarquons que pour les deux ensembles $z = 5$ n'est pas solution, donc

$$\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-3| = |z-5|.$$

Ce qui signifie précisément que les points d'affixe z sont situés à égale distance des points A, B d'affixes respectives $3 = (3,0)$ et $5 = (5,0)$. L'ensemble solution est la médiatrice du segment $[A,B]$.

Ensuite pour

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} &\Leftrightarrow |z-3|^2 = \frac{1}{2}|z-5|^2\\
&\Leftrightarrow (z-3)\overline{(z-3)} = \frac{1}{2}(z-5)\overline{(z-5)}\\
&\Leftrightarrow z\bar{z}-(z+\bar{z}) = 7\\
&\Leftrightarrow |z-1|^2 = 8\\
&\Leftrightarrow |z-1| = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc le cercle de centre le point d'affixe $1=(1,0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 13 ▲

$$|u+v|^2+|u-v|^2 = (u+v)(\bar{u}+\bar{v})+(u-v)(\bar{u}-\bar{v}) = 2u\bar{u}+2v\bar{v} = 2|u|^2+2|v|^2.$$

Géométriquement il s'agit de l'identité du parallélogramme. Les points d'affixes $0,u,v,u+v$ forment un parallélogramme. $|u|$ et $|v|$ sont les longueurs des cotés, et $|u+v|,|u-v|$ sont les longueurs des diagonales. Il n'est pas évident de montrer ceci sans les nombres complexes ! !

Correction de l'exercice 14 ▲

1. Comme $(A_0,\dots,A_4)$ est un pentagone régulier, on a $OA_0=OA_1=OA_2=OA_3=OA_4=1$ et $(\overrightarrow{OA_0},\overrightarrow{OA_1}) = \frac{2\pi}{5}[2\pi], (\overrightarrow{OA_0},\overrightarrow{OA_2}) = \frac{4\pi}{5}[2\pi], (\overrightarrow{OA_0},\overrightarrow{OA_3}) = -\frac{4\pi}{5}[2\pi], (\overrightarrow{OA_0},\overrightarrow{OA_4}) = -\frac{2\pi}{5}[2\pi],$. On en déduit : $\omega_0 = 1, \omega_1 = e^{\frac{2i\pi}{5}}, \omega_2 = e^{\frac{4i\pi}{5}}, \omega_3 = e^{-\frac{4i\pi}{5}} = e^{\frac{6i\pi}{5}}, \omega_4 = e^{-\frac{2i\pi}{5}} = e^{\frac{8i\pi}{5}},$. On a bien $\omega_i = \omega_1^i$. Enfin, comme $\omega_1 \neq 0$, $1+\omega_1+\ldots+\omega_1^4 = \frac{1-\omega_1^5}{1-\omega_1} = \frac{1-1}{1-\omega_1} = 0$.
2. $\mathrm{Re}(1+\omega_1+\ldots+\omega_1^4) = 1+2\cos(\frac{2\pi}{5})+2\cos(\frac{4\pi}{5})$. Comme $\cos(\frac{4\pi}{5}) = 2\cos^2(\frac{2\pi}{5})-1$ on en déduit : $4\cos^2(\frac{2\pi}{5})+2\cos(\frac{2\pi}{5})-1=0$. $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est donc bien une solution de l'équation $4z^2+2z-1=0$. Etudions cette équation : $\Delta = 20 = 2^2.5$. Les solutions sont donc $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Comme $\cos(\frac{2\pi}{5})>0$, on en déduit que $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
3. $BA_2^2 = |\omega_2+1|^2 = |\cos(\frac{4\pi}{5})+i\sin(\frac{4\pi}{5})+1|^2 = 1+2\cos(\frac{4\pi}{5})+\cos^2(\frac{4\pi}{5})+\sin^2(\frac{4\pi}{5}) = 4\cos^2(\frac{2\pi}{5})$. Donc $BA_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
4. $BI = |i/2+1| = \frac{\sqrt{5}}{2}$. $BJ = BI-1/2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
5. Pour tracer un pentagone régulier, on commence par tracer un cercle C_1 et deux diamètres orthogonaux, qui jouent le rôle du cercle passant par les sommets et des axes de coordonnées. On trace ensuite le milieu d'un des rayons : on obtient le point I de la question 4. On trace le cercle de centre I passant par le centre de C_1 : c'est le cercle $\mathscr{C}$. On trace le segment BI pour obtenir son point J d'intersection avec $\mathscr{C}$. On trace enfin le cercle de centre B passant par J : il coupe C_1 en A_2 et A_3, deux sommets du pentagone. Il suffit pour obtenir tous les sommets de reporter la distance A_2A_3 sur C_1, une fois depuis A_2, une fois depuis A_3. (en fait le cercle de centre B et passant par J', le point de $\mathscr{C}$ diamétralement opposé à J, coupe C_1 en A_1 et A_4, mais nous ne l'avons pas justifié par le calcul : c'est un exercice !)

Correction de l'exercice 15 ▲

Écrivons $z=\rho e^{i\theta}$, alors $\bar{z}=\rho e^{-i\theta}$. Donc

$$
\begin{aligned}
P &= \prod_{k=1}^{n}\left(z^k+\bar{z}^k\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n}\rho^k\left((e^{i\theta})^k+(e^{-i\theta})^k\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n}\rho^k\left(e^{ik\theta}+e^{-ik\theta}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n}2\rho^k\cos k\theta \\
&= 2^n.\rho.\rho^2.\ldots.\rho^n\prod_{k=1}^{n}\cos k\theta \\
&= 2^n\rho^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{k=1}^{n}\cos k\theta.
\end{aligned}
$$

Correction de l'exercice 16 ▲

Nous avons par la formule de Moivre

$$\cos 5\theta+i\sin 5\theta=e^{i5\theta}=(e^{i\theta})^5=(\cos\theta+i\sin\theta)^5.$$

On développe ce dernier produit, puis on identifie parties réelles et parties imaginaires. On obtient :

$$
\begin{array}{rcl}
\cos 5\theta &=& \cos^5\theta-10\cos^3\theta\sin^2\theta+5\cos\theta\sin^4\theta \\
\sin 5\theta &=& 5\cos^4\theta\sin\theta-10\cos^2\theta\sin^3\theta+\sin^5\theta
\end{array}
$$

Remarque : Grâce à la formule $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$, on pourrait continuer les calculs et exprimer $\cos 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$, et $\sin 5\theta$ en fonction de $\sin\theta$.

Correction de l'exercice 17 ▲

1. Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}[i]$. Notons $\alpha=a+ib$ et $\beta=c+id$ avec $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$. Alors $\alpha+\beta=(a+c)+i(b+d)$ et $a+c\in\mathbb{Z}$, $b+d\in\mathbb{Z}$ donc $\alpha+\beta\in\mathbb{Z}[i]$. De même, $\alpha\beta=(ac-bd)+i(ad+bc)$ et $ac-bd\in\mathbb{Z}$, $ad+bc\in\mathbb{Z}$ donc $\alpha\beta\in\mathbb{Z}[i]$.
2. Soit $\alpha\in\mathbb{Z}[i]$ inversible. Il existe donc $\beta\in\mathbb{Z}[i]$ tel que $\alpha\beta=1$. Ainsi, $\alpha\neq 0$ et $\frac{1}{\alpha}\in\mathbb{Z}[i]$. Remarquons que tout élément non nul de $\mathbb{Z}[i]$ est de module supérieur ou égal à 1 : en effet $\forall z\in\mathbb{C}, |z|\geqslant\sup(|\mathrm{Re}(z)|,|\mathrm{Im}(z)|)$ et si $z\in\mathbb{Z}[i]\setminus\{0\}$, $\sup(|\mathrm{Re}(z)|,|\mathrm{Im}(z)|)\geqslant 1$. Si $|\alpha|\neq 1$ alors $|\alpha|>1$ et $|1/\alpha|<1$. On en déduit $1/\alpha=0$ ce qui est impossible. Ainsi $|\alpha|=1$, ce qui implique $\alpha\in\{1,-1,i,-i\}$.
   Réciproquement, $1^{-1}=1\in\mathbb{Z}[i],(-1)^{-1}=-1\in\mathbb{Z}[i],i^{-1}=-i\in\mathbb{Z}[i],(-i)^{-1}=i\in\mathbb{Z}[i]$. Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont donc $1,-1,i$ et $-i$.
3. Soit $\omega\in\mathbb{C}$. Notons $\omega=x+iy$ avec $x,y\in\mathbb{R}$. soit $E(x)$ la partie entière de x, i.e. le plus grand entier inférieur ou égal à x : $E(x)\leqslant x<E(x)+1$. Si $x\leqslant E(x)+1/2$, notons $n_x=E(x)$, et si $x>E(x)+1/2$, notons $n_x=E(x)+1$. n_x est le, ou l'un des s'il y en a deux, nombre entier le plus proche de x : $|x-n_x|\leqslant 1/2$. Notons n_y l'entier associé de la même manière à y. Soit alors $\alpha=n_x+i\cdot n_y$. $z\in\mathbb{Z}[i]$ et $|\omega-\alpha|^2=(x-n_x)^2+(y-n_y)^2\leqslant 1/4+1/4=1/2$. Donc $|\omega-\alpha|<1$.
4. Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}[i]$, avec $\beta\neq 0$. Soit alors $q\in\mathbb{Z}[i]$ tel que $|\frac{\alpha}{\beta}-q|<1$. Soit $r=\alpha-\beta q$. Comme $\alpha\in\mathbb{Z}[i]$ et $\beta q\in\mathbb{Z}[i]$, $r\in\mathbb{Z}[i]$. De plus $|\frac{r}{\beta}|=|\frac{\alpha}{\beta}-q|<1$ donc $|r|<|\beta|$.
