Exercice 1 :

Ecrire la négation des propositions suivantes :

1 - Toutes les voitures rapides sont Italiennes,

2 - il existe un mouton Sardi dont au moins un côté est noir,

3 - Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $q \in \mathbb{Q}^*+$ tel que $0 < q < \varepsilon$,

4 - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 < 0$.

Exercice 2 :

Enoncer la négation des assertions suivantes :

1. Tout triangle rectangle possède un angle droit.
2. Dans toutes les prisons tous les détenus détestent tous les gardiens.
3. Pour tout entier x il existe un entier y tel que pour tout entier z la relation $z < y$ implique la relation $z < x + 1$.

Exercice 3 :

Supposons que "les chiens aboient" et "la caravane passe". Traduisez les propositions suivantes en langage propositionnel.

(On note p : "les chiens aboient" ; q : "la caravane passe")

1 - Si la caravane passe, alors les chiens aboient.

2 - Les chiens n'aboient pas.

3 - La caravane ne passe pas ou les chiens aboient.

4 - Les chiens n'aboient pas et la caravane ne passe pas.

Exercice 4 :

Dans chacun des deux exemples, y a-t-il équivalence entre A et B ?

Donner l'implication vraie, s'il y en a une.

Exemple 1 :

A : Pour toute porte, il existe une clé qui ouvre la porte.

B : Il existe une clé, pour toute porte, la clé ouvre la porte.

Exemple 2 :

A : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $y \in \mathbb{R}$, $y < x$

B : Il existe $y \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y < x$.

Exercice 5 :

Trouver les relations logiques existantes entre les assertions suivantes :

A - Tous les hommes sont mortels

B - Tous les hommes sont immortels

C - Aucun homme n'est mortel

D - Aucun homme n'est immortel

E - Il existe des hommes immortels

F - Il existe des hommes mortels

Exercice 6 :

On dit que "P <u>ou exclusif</u> Q" est vrai si P ou Q est vrai mais pas si P et Q vrai en même temps.

Ecrire la table de vérité du "ou exclusif".

Exercice 7 :

Soient I un intervalle de et f : I→R une fonction définie sur I à valeurs réelles.

Exprimer verbalement la signification des assertions suivantes :

(a) $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = C$

(b) $\forall x \in I, f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$

(c) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$

(d) $\forall x, y \in I, x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$

(e) $\forall x, y \in I, f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$.

Exercice 8 :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I.

Exprimer les négations des assertions suivantes :

(a) $\forall x \in I\,, f(x) \neq 0$

(b) $\forall y \in R\,, \exists x \in I, f(x) = y$

(c) $\exists M \in R\,, \forall x \in I, | f(x) | \leq M$

(d) $\forall x, y \in I\,, x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$

(e) $\forall x, y \in I\,, f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$

(f) $\forall x \in I\,, f(x) > 0 \Longrightarrow x \leq 0$.

Exercice 9 :

Un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est dit ouvert si la propriété suivante est vérifiée :

$\forall\, x \in A\, \exists\, \varepsilon > 0$ *tel que* $]x - \varepsilon\,;\, x + \varepsilon[\in A$.

a) Montrer que $]0,1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

b) En niant la définition ci-dessus, montrer que $[0,1[$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.

c) Quels sont les ensembles $A \subset \mathbb{R}$ qui vérifient la définition ci-dessus après interversion des quantificateurs "$\forall$ x $\in$ A" et "$\exists$ $\varepsilon > 0$".

Exercice 10 :

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

On considère les assertions suivantes :

$P \sim$ « $\forall x \in R, f(x) = 0$ », $Q \sim$ « $\exists x \in R, f(x) = 0$ »

et $R \sim$ « $(\forall x \in R, f(x) > 0)$ *ou* $(\forall x \in R, f(x) < 0)$ ».

Parmi les implications suivantes lesquelles sont exactes :

(a) $P \Longrightarrow Q$ (b) $Q \Longrightarrow P$ (c) $Q \Longrightarrow R$

(d) $\bar{R} \Longrightarrow Q$ (e) $\bar{Q} \Longrightarrow \bar{P}$ (f) $\bar{P} \Longrightarrow \bar{R}$

Exercice 11 :

Soit $a \in \mathbb{R}$,

Montrer que $(\forall \varepsilon \geq 0\,, |a| \leq \varepsilon) \Longrightarrow a = 0$.

Exercice 12 :
Sachant $\sqrt{2} \notin Q$, montrer $\forall x \in \mathbb{Q}, x + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 13 :
Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle déterminée par :
$$U_0 = 2, U_1 = 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = 3U_{n+1} - 2U_n.$$
Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 2^n + 1$.

Exercice 14 :
Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}.$$

Exercice 15 :
Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1!\,3! \dots (2n+1)! \geq \big((n+1)!\big)^{n+1}.$$

Exercice 16 :
Montrer que pour tout naturel n, on a
1 - $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$
2 - $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
3 - $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4 - $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
5 - $10^n - (-1)^n$ est divisible par 11.

Exercice 17 :
En utilisant un raisonnement par l'absurde, démontrer que :
1. La somme et le produit d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel sont des nombres irrationnels.
2. La racine carré d'un nombre irrationnel positif est un nombre irrationnel.
3. Un rectangle a pour aire 170 m². Montrer que sa longueur est supérieure à 13 m.
4. Démontrer par un raisonnement par l'absurde la proposition suivante :
" Si n est le carré d'un nombre entier non nul alors 2n n'est pas le carré d'un nombre entier".

Exercice 18 :
A l'aide d'un raisonnement par contraposé, démontrer que:
1. Si n^2 est impair alors n est impair. ($n \in \mathbb{N}$)
2. Si $\forall \varepsilon > 0$ $a \leq \varepsilon$ alors $a \leq 0$ ($a \in \mathbb{R}$).
3. Soit a un réel. Si a^2 n'est pas un multiple de 16, alors $a/2$ n'est pas un entier pair.

Exercice 19 :
Montrer que 2014 ne peut pas s'écrire comme la somme de deux carrés.

Exercice 20 :
Montrer que l'ensemble $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\}$ ne peut pas s'écrire comme le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

Exercice 21 :
Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = 4^{4n+2} - 3^{n+3}$ est divisible par 11.

Exercice 22 :
On définit une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ par : $U_0 = 1$, $U_1 = \cos\theta$, et pour $n \geq 2$: $U_n = 2U_1U_{n-1} - U_{n-2}$.
Calculer U_n, pour tout entier n.